Symmetrisch gekoppelte Systeme

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{pmatrix}$$

mit Matrizen

$$A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \quad B \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, \quad D \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$$

Sei

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & D \end{pmatrix}$$

symmetrisch und positiv definit:

$$(M\underline{x}, \underline{x}) \geq c_1^M \|\underline{x}\|_2^2 \quad \text{für alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } n = n_1 + n_2$$

Folgerung

$$(A\underline{x}_1,\underline{x}_1) \;\geq\; c_1^M\,\|\underline{x}_1\|_2^2 \quad \text{für alle } \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$$

$$(D\underline{x}_2,\underline{x}_2) \;\geq\; c_1^M\,\|\underline{x}_2\|_2^2 \quad \text{für alle } \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$$

Auflösung der ersten Gleichung

$$\underline{x}_1 \;=\; A^{-1}\underline{f}_1 - A^{-1}B\underline{x}_2$$

Schur Komplement System

$$S\underline{x}_2 \;=\; \left[D - B^\top A^{-1}B\right]\underline{x}_2 \;=\; \underline{f}_2 - B^\top A^{-1}\underline{f}_1 \;=\; \underline{f}$$

Es gilt

$$(S\underline{x}_2,\underline{x}_2) \;\geq\; c_1^M\,\|\underline{x}_2\|_2^2 \quad \text{für alle } \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$$

Für $\underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ist $\underline{x}_1 = -A^{-1}B\underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_1}$:

$$\begin{aligned} c_1^M\,\|\underline{x}_2\|_2^2 &\leq c_1^M\,\|\underline{x}\|_2^2 \leq (M\underline{x},\underline{x}) = (A\underline{x}_1,\underline{x}_1) + 2\,(B^\top\underline{x}_1,\underline{x}_2) + (D\underline{x}_2,\underline{x}_2) \\ &= (B\underline{x}_2, A^{-1}B\underline{x}_2) - 2\,(B^\top A^{-1}B\underline{x}_2,\underline{x}_2) + (D\underline{x}_2,\underline{x}_2) = (S\underline{x}_2,\underline{x}_2) \end{aligned}$$

CG Verfahren für Schur Komplement System

$$S\underline{x}_2 = \underline{f}$$

Spektraläquivalenzungleichungen

$$c_1^S\,(C_S\underline{x}_2,\underline{x}_2) \,\le\, (S\underline{x}_2,\underline{x}_2) \,\le\, c_2^S\,(C_S\underline{x}_2,\underline{x}_2) \quad \text{für alle } \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$$

Berechnung von

$$\underline{s}^k = S\underline{p}^k = D\underline{p}^k - B^\top A^{-1}B\underline{p}^k = D\underline{p}^k - B^\top\underline{w}^k, \quad \underline{w}^k = A^{-1}B\underline{p}^k$$

mit

$$A\underline{w}^k = B\underline{p}^k$$

- direkte Invertierung
- CG Verfahren Spektraläquivalenzungleichungen

$$c_1^A\,(C_A\underline{x}_1,\underline{x}_1) \,\le\, (A\underline{x}_1,\underline{x}_1) \,\le\, c_2^A\,(C_A\underline{x}_1,\underline{x}_1) \quad \text{für alle } \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$$

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{pmatrix}$$

- CG Verfahren
- Vorkonditionierungsmatrix C_M Spektraläquivalenzungleichungen

$$c_1^M\,(C_M\underline{x},\underline{x}) \,\le\, (M\underline{x},\underline{x}) \,\le\, c_2^M\,(C_M\underline{x},\underline{x}) \quad \text{für alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

Faktorisierung

$$M = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ B^\top A^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & A^{-1}B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

Vorkonditionierungsmatrix

$$C_M = \begin{pmatrix} C_A & 0 \\ 0 & C_S \end{pmatrix}$$

Sei

$$\mu = \sup_{0 \neq \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}} \frac{(B^\top A^{-1} B \underline{x}_2, \underline{x}_2)}{(S \underline{x}_2, \underline{x}_2)}$$

Dann gelten die Spektraläquivalenzungleichungen mit

$$\begin{aligned} c_1^M &= \frac{1}{2}[c_1^A + c_1^S(1+\mu)] - \sqrt{\frac{1}{4}[c_1^A + c_1^S(1+\mu)]^2 - c_1^S c_1^A} \\ c_2^M &= \frac{1}{2}[c_2^A + c_2^S(1+\mu)] + \sqrt{\frac{1}{4}[c_2^A + c_2^S(1+\mu)]^2 - c_2^S c_2^A} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_1^M &= \frac{1}{2}[c_1^A + c_1^S(1+\mu)] - \sqrt{\frac{1}{4}[c_1^A + c_1^S(1+\mu)]^2 - c_1^S c_1^A} \\
c_2^M &= \frac{1}{2}[c_2^A + c_2^S(1+\mu)] + \sqrt{\frac{1}{4}[c_2^A + c_2^S(1+\mu)]^2 - c_2^S c_2^A}
\end{aligned}
$$

Für B ist $\mu = 0$ und somit

$$
\begin{aligned}
c_1^M &= \frac{1}{2}[c_1^A + c_1^S] - \frac{1}{2}|c_1^A - c_1^S| = \min\{c_1^A, c_1^S\} \\
c_2^M &= \frac{1}{2}[c_2^A + c_2^S] + \frac{1}{2}|c_2^A - c_2^S| = \max\{c_2^A, c_2^S\}
\end{aligned}
$$

Definieren zunächst

$$\widetilde{C}_M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

Spektraläquivalenzungleichungen

$$\widetilde{c}_1^M \, (\widetilde{C}_M \underline{x}, \underline{x}) \le (M\underline{x}, \underline{x}) \le \widetilde{c}_2^M \, (\widetilde{C}_M \underline{x}, \underline{x})$$

mit den Konstanten

$$\widetilde{c}_1^M = 1 + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 + 4\mu}, \quad \widetilde{c}_2^M = 1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 + 4\mu}$$

Aus

$$\min\{c_1^A, c_1^S\} \, (C_M \underline{x}, \underline{x}) \le (\widetilde{C}_M \underline{x}, \underline{x}) \le \max\{c_2^A, c_2^S\} \, (C_M \underline{x}, \underline{x})$$

folgen dann die Spektraläquivalenzungleichungen

$$\widetilde{c}_1^M \min\{c_1^A, c_1^S\} \, (C_M \underline{x}, \underline{x}) \le (M\underline{x}, \underline{x}) \le \widetilde{c}_2^M \max\{c_2^A, c_2^S\} \, (C_M \underline{x}, \underline{x})$$

spektrale Konditionszahl

$$\kappa_2(C_M^{-1} M) \le \frac{\max\{c_2^A, c_2^S\}}{\min\{c_1^A, c_1^S\}} \left[1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 + 4\mu} \right]^2$$

Vorkonditionierung

$$C_M = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ B^\top C_A^{-1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_A & 0 \\ 0 & C_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & C_A^{-1}B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

Spektraläquivalenzungleichungen mit

$$\begin{aligned} c_1^M &= \min\{c_1^A, c_1^S\} \left[1 + \frac{1}{2}(\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\mu})\right] \\ c_2^M &= \max\{c_2^A, c_2^S\} \left[1 + \frac{1}{2}(\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\mu})\right] \end{aligned}$$

und

$$\mu = \sup_{0 \neq \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}} \frac{(B^\top (C_A^{-1} - A^{-1}) A (C_A^{-1} - A^{-1}) B \underline{x}_2, \underline{x}_2)}{(S\underline{x}_2, \underline{x}_2)}$$