Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Olaf Steinbach
Julia Hauser

Numerische Mathematik 3

Sobolev-Räume, 12. März 2020

Aufgabe 1: Sei $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ und $C = (0,2)$. Zeige, dass Ω einen Lipschitz-Rand besitzt. Wähle dafür eine offene Überdeckung $U^1, ..., U^l$ von $\partial\Omega$ so, dass nach Drehung und Verschiebung der Randteile $\partial\Omega_i = U^i \cap \partial\Omega$, die Teile $\partial\Omega_i$ durch Lipschitz-stetige Funktionen beschrieben werden können. Gebe die Funktionen an.

Aufgabe 2: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Zeige die folgenden Eigenschaften verallgemeinerter Ableitungen:

a) Die verallgemeinerten Ableitungen $D^\alpha u \in L_1^{loc}(\Omega)$ eine Funktion $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ sind, falls existent, eindeutig (bis auf eine Menge vom Maß Null) festgelegt.

b) Für $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ sind die klassische und die verallgemeinerte Ableitung bis zur Ordnung $|\alpha|$ ident.

Hinweis: Das Fundamentallemma der Variationsrechnung gilt auch für Funktionen aus $L_1^{loc}(\Omega)$.

Aufgabe 3: Sei $-\infty < a < 0 < b < \infty$ und sei $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Weiters sei die Funktion $g(x) := |x|$ für $x \in \Omega$ gegeben.

a) Berechne die erste verallgemeinerte Ableitung w und zeige, dass sie in $L^2(\Omega)$ liegt.

b) Zeige, dass die zweite verallgemeinerte Ableitung von g nicht existiert.
Hinweis: Betrachte als Testfunktion $x \to x\varphi(x)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Aufgabe 4:

- Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ normierte Räume und $A : X \to Y$ ein stetiger linearer Operator. Zeige, dass der Kern von A ein abgeschlossener Unterraum von X ist.
- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Zeige, dass
  - $H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{H^1(\Omega)}} = \{ \ u \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0^{int} u = 0 \ \}$
  - $H_*^1(\Omega) := \{ \ u \in H^1(\Omega) \mid \int\limits_\Omega u \, dx = 0 \ \}$

  abgeschlossene Unterräume von $H^1(\Omega)$ sind.

Aufgabe 5: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet.

- Zeige, dass die Halbnorm $\|\nabla.\|_{L^2(\Omega)} =: | \ . \ |_{H^1(\Omega)}$ eine zu $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalente Norm im Hilbertraum $(H_0^1(\Omega), \langle .,. \rangle_{H^1(\Omega)})$ ist. Gilt dies auch im Hilbertraum $(H^1(\Omega), \langle .,. \rangle_{H^1(\Omega)})$?
Hinweis: Verwende dafür Ergebnisse zum Normierungssatzes von Sobolev aus der Vorlesung.
- Zeige, unter Verwendung einer äquivalenten Norm zu $\|.\|_{H^1(\Omega)}$, dass

$$C_*^\infty(\overline{\Omega}) := \left\{ \ v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mid \int\limits_\Omega v \, dx = 0 \ \right\}$$

  dicht in $(H_*^1(\Omega), \langle .,. \rangle_{H^1(\Omega)})$ liegt.