Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Olaf Steinbach
Julia Hauser

Numerische Mathematik 3

Variationsformulierung und stw. gegebene Funktionen, 25. Mai 2020

Aufgabe 15: (3 Punkte) Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform mit

$$\alpha \|v\|^2 \le a(v,v) \quad \forall v \in V$$

und

$$a(u,v) \le \beta \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V,$$

wobei $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ und $\alpha, \beta > 0$.

Für $u \in V$ definiere man $(Au) : v \mapsto a(u,v)$ für $v \in V$. Zeige:

a) $(Au) \in V'$.

b) Die Abbildung A, definiert durch $A : u \mapsto (Au)$ für $u \in V$, ist eine lineare und stetige Abbildung von V nach V' mit $\|A\|_{V \to V'} \le \beta$.

Aufgabe 16: (3 Punkte)

a) Sei der Operator A wie oben definiert, $(V, (.,.))$ ein Hilbertraum, $\{v_j\}_{j \in J}$ eine Basis von V und $f \in V'$. Zeige, dass für $u \in V$ gilt

$$\begin{aligned} (Au, v) - (f, v) = 0, \ \ \forall v \in V \ &\Leftrightarrow \ Au = f \\ &\Leftrightarrow (Au, v_j) - (f, v_j) = 0, \ \ \forall j \in J. \end{aligned}$$

b) Sei $V_h \subset V$ ein endlicher abgeschlossener Teilraum mit $\dim V_h = n$ und vollständiger Orthonormalbasis $\{v_j\}_{j=1}^n$. Zeige, dass $A_h \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $f_h \in \mathbb{R}^n$ existieren, sodass für $u_h \in V_h$

$$(Au_h, v_h) - (f, v_h) = 0, \ \ \forall v_h \in V_h \ \Leftrightarrow \ A_h \underline{u_h} = f_h.$$

äquivalent sind, wobei

$$\underline{u_h}[i] = (u_h, v_i).$$

c) Sei

$$(x, y) := y^T x$$

das euklidische Skalarprodukt für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeige, dass

$$v^T A u - v^T f = 0, \ \ \forall v \in \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow \ Au = f.$$

Variationsformulierungen

Um auf eine Variationsformulierung zu kommen, geht man drei Schritte durch:

- Multipliziere mit einer Testfunktion (Testfunktionen sind in $C_0^\infty(\Omega)$).
- Integriere partiell um den Grad der Differentiation in der Formulierung auf das Kleinstmögliche zu reduzieren.
- Wähle Ansatz- und Testraum so, dass die Integrale in der Formulierung wohl definiert sind.

Um Lösbarkeit zu zeigen, verwendet man häufig den Satz von Lax-Milgram, siehe Vorlesung Anfang des Semesters. Dazu untersucht man die entstandene Bilinearform und die rechte Seite.

Aufgabe 17: (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Gegeben sei das Robin-Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) \qquad \text{für } x \in \Omega, \\ \nabla u(x) \cdot \vec{n}(x) + \kappa(x) u(x) &= g_R(x) \qquad \text{für } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $f \in L^2(\Omega)$, $g_R \in L^2(\partial\Omega)$ und $\kappa \in L^\infty(\partial\Omega)$ mit $\kappa(x) \geq \kappa_0 > 0$ für fast alle $x \in \partial\Omega$ und $\kappa_0 \in \mathbb{R}$. Leite für das Robin-Randwertproblem die zugehörige Variationsformulierung in $H^1(\Omega)$ her und zeige, dass diese eindeutig lösbar ist. Weiters zeige, dass eine Konstante $C_1 > 0$ existiert, sodass für die eindeutige Lösung u die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g_R\|_{L^2(\partial\Omega)} \right)$$

gilt.

Hinweis: Die Hölder Ungleichung gilt auch für $h \in L^2(\partial\Omega)$.

Aufgabe 18: (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Weiters seien hinreichend glatte Funktionen $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d \in [L^\infty(\Omega)]^{d\times d}$, $\vec{b} \in [L^\infty(\Omega)]^d$ mit $\operatorname{div} \vec{b} \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$ sowie $f \in L^2(\Omega)$ gegeben. Für das Randwertproblem

$$-\operatorname{div}\left[A(x)\nabla u(x)\right] + \vec{b}(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = f(x) \qquad \text{für } x \in \Omega, \qquad u(x) = 0 \qquad \text{für } x \in \partial\Omega$$

leite man eine Variationsformulierung in $H_0^1(\Omega)$ her. Falls ein $A_0 > 0$ und ein $p_0 \geq 0$ existieren, sodass

$$\forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq A_0 \|\vec{\xi}\|^2 \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega$$

und

$$c(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div} \vec{b}(x) \geq p_0 \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega$$

gelten, zeige man, dass die zugehörige Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch, d.h. $\exists c_1 > 0$ sodass

$$a(v,v) \geq c_1 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

und beschränkt in $H_0^1(\Omega)$ ist.

Das Finite Element - Wiederholung

Jedes Finite Element (nach Ciarlet 2002) besteht aus einem Triple $(T, \mathcal{V}, \mathcal{L})$:

- $T \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und abgeschlossen ist die geometrische Repräsentation beispielsweise ein Intervall, Dreieck oder Tetraeder.
- $\mathcal{V} = \mathcal{V}(T)$, $\dim \mathcal{V} = n$ ist ein endlich dimensionaler Funktionenraum auf T. Dies ist der Funktionenraum woraus Ansatz- und Testfunktionen gewählt werden.
- $\mathcal{L} = \{l_1, ..., l_n\}$ ist die Menge der Freiheitsgrade, die eine Basis des Dualraumes $\mathcal{V}'$ formen.

Ein Beispiel, die H^1-Finiten Elemente (auch Lagrange Elemente), habt ihr bereits gesehen:

- $T \in \{$ Intervall, Dreieck oder Tetraeder $\}$.
- $\mathcal{V} = \mathbb{P}_q(T)$. Von diesem Raum ist die nodale Basis eine Basis wodurch wir die folgenden Freiheitsgrade definieren können:

- $l_i(v) = v(x^i)$, $i = 1, .., n(q)$, wobei

$$x = \begin{cases} \frac{i}{q}, & 0 \leq i \leq q,\ T = \text{Intervall}, \\ (\frac{i}{q}, \frac{j}{q}), & 0 \leq i + j \leq q,\ T = \text{Dreieck}, \\ (\frac{i}{q}, \frac{j}{q}, \frac{k}{q}), & 0 \leq i + j + k \leq q,\ T = \text{Tetraeder}. \end{cases}$$

Wir haben bereits in der Vorlesung und im Tutorium 3 gelernt, dass man jedes finite Element in einer Diskretisierung mittels des Referenzelementes beschreiben können. Wenn wir nun das Referenzelement $(\hat{T}, \hat{\mathcal{V}}, \hat{\mathcal{L}})$ definieren, folgt

- $T = F_T(\hat{T})$,
- $\mathcal{V}_T = \{ \ v \mid v = \hat{v} \circ F_T^{-1},\ \hat{v} \in \hat{\mathcal{V}} \ \}$,
- $\mathcal{L}_T = \{ \ l_i \mid l_i(v) = \hat{l}_i(v \circ F_T),\ i = 1, ..., \hat{n} = n_T \ \}$.

Ebenso habt ihr bereits in der Vorlesung mit dem Funktionenraum über die zusammengesetzten Lagrange Elemente der Zerlegung $\mathcal{T}_N$ gearbeitet:

$$S_h^1(\mathcal{T}_N) = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_N\}$$

also den Raum der stückweise linearen und global stetigen Funktionen. Wie sich diese Funktionen verhalten erarbeitet ihr im nächsten Beispiel:

Aufgabe 19: (3 Punkte) Man betrachte eine zulässige Zerlegung $\overline{\mathcal{T}_N} = \bigcup_{l=1}^N \overline{\tau_l} \subset \mathbb{R}^d$ von $\Omega = \mathcal{T}_N$. Man zeige, dass für jede Funktion $v \in C(\overline{\mathcal{T}_N})$ mit $v_{|\overline{\tau_l}} \in C^1(\overline{\tau_l})$ für $l = 1, \ldots, N$ auch $v \in H^1(\mathcal{T}_N)$ folgt. Dazu zeige man folgende Eigenschaften:

i) $v \in L^2(\mathcal{T}_N)$.

ii) $w_j \in L^2(\mathcal{T}_N)$ mit $w_{j|\tau_l} := \partial_{x_j}(v_{|\tau_l})$ für $j = 1, \ldots, d,\ l = 1, \ldots, N$.

iii) w_j ist schwache j-te partielle Ableitung von v. Das heißt, es gilt

$$\int_{\mathcal{T}_N} w_j \varphi \mathrm{d}x = - \int_{\mathcal{T}_N} v \partial_{x_j} \varphi \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{T}_N).$$

Hinweis: Man integriere elementweise partiell. Warum verschwinden die auftretenden Randintegrale?

Also gilt, dass $S_h^1(\mathcal{T}_N) \subset H^1(\mathcal{T}_N)$ und zudem ist $S_h^1(\mathcal{T}_N)$ endlich. Damit ist der Funktionenraum eine gute Wahle für $\mathcal{V}$. Deswegen habt ihr bereits viel mit ihm in der Vorlesung gearbeitet.
Ebenso habt ihr in der Vorlesung behandelt, wie der Interpolationsfehler auf $S_h^1(\mathcal{T}_N)$ aussieht, wenn die Zerlegung $\mathcal{T}_N$ zulässig und formregulär ist. Was jedoch passiert, wenn das nicht der Fall ist, seht ihr im nächsten Beispiel:

Aufgabe 20: (4 Punkte) Skizziere für $h > 0$ und $\varepsilon > 0$ das Dreieck $\tau_D \subset \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(-h, 0)^\top$, $(h, 0)^\top$ und $(0, \varepsilon h)^\top$. Berechne für kleines $\varepsilon > 0$ für dieses Dreieck den Inkreisradius r_D und den Durchmesser d_D. Was folgt für das Verhältnis $\frac{d_D}{r_D}$ für $\varepsilon \to 0$? Was passiert mit den Winkeln und der Formregulärität?

Für die Funktion $u(x_1, x_2) := x_1^2$ berechne das lineare Interpolationspolynom $I_{\tau_D} u(x_1, x_2) := a + bx_1 + cx_2$ mit zu bestimmenden Koeffizienten a, b, c, wobei die Eckpunkte als Stützstellen verwendet werden sollen. Zeige, dass

$$\frac{\|u - I_{\tau_D} u\|_{L^2(\tau_D)}}{|u|_{H^2(\tau_D)}} = h^2 \left(\frac{3}{40}\right)^{1/2},$$
$$\frac{|u - I_{\tau_D} u|_{H^1(\tau_D)}}{|u|_{H^2(\tau_D)}} = h \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\varepsilon^{-2}\right)^{1/2}$$

gelten. Was bedeutet das für $\varepsilon \to 0$?

Hinweis: Verwende für die Berechnung des Inkreisradius entsprechende Formeln.