

Numerische Mathematik 3

FEM, 8. Juni 2020

Normäquivalenz 3D

Im der Vorlesung zum Referenzelement, 21.04., habt ihr bereits im Detail die Normäquivalenz in 2D gezeigt. Im folgenden Beispiel leiten wir gleiches her für 3D.

Aufgabe 21: (Theorie, 3 Punkte) Mit den Bezeichnungen der Vorlesung betrachte man eine formreguläre und zulässige Unterteilung in Tetraeder $\tau_l \subset \mathbb{R}^3$ mit Knoten $x_{l_1}, x_{l_2}, x_{l_3}$ und x_{l_4} . Das Referenzelement $\tau \subset \mathbb{R}^3$ ist durch den Tetraeder

$$\bar{\tau} := \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_1, 0 \leq \xi_3 \leq 1 - \xi_1 - \xi_2\}$$

gegeben. Für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $v: \bar{\tau}_l \rightarrow \mathbb{R}$ zeige man

a)

$$\Delta_l := \int_{\tau_l} dx = \frac{1}{6} |\det J_l| \quad \text{und} \quad \|v\|_{L^2(\tau_l)}^2 = 6\Delta_l \|\tilde{v}_l\|_{L^2(\tau)}^2,$$

b)

$$\frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial \xi_i}(\xi) = \sum_{j=1}^3 J_l[j, i] \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \quad \text{für } x \in \tau_l, \xi \in \tau, i = 1, 2, 3$$

und daher

$$\nabla_\xi \tilde{v}_l(\xi) = J_l^\top \nabla_x v(x) \quad \text{und} \quad \nabla_x v(x) = J_l^{-\top} \nabla_\xi \tilde{v}_l(\xi) \quad \text{mit} \quad J_l^{-\top} := (J_l^\top)^{-1},$$

c)

$$6\Delta_l \lambda_{\min}(J_l^{-1} J_l^{-\top}) \|\nabla_\xi \tilde{v}_l\|_{L^2(\tau)}^2 \leq \|\nabla_x v\|_{L^2(\tau_l)}^2 \leq 6\Delta_l \lambda_{\max}(J_l^{-1} J_l^{-\top}) \|\nabla_\xi \tilde{v}_l\|_{L^2(\tau)}^2$$

mit dem minimalen Eigenwert $\lambda_{\min}(J_l^{-1} J_l^{-\top})$ und dem maximalen Eigenwert $\lambda_{\max}(J_l^{-1} J_l^{-\top})$ von der Matrix $J_l^{-1} J_l^{-\top} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Formfunktionen

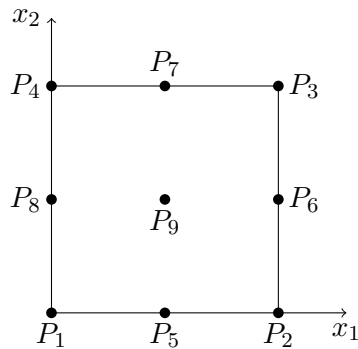
Formfunktionen gibt es nicht nur auf Dreiecken und sie sind nicht immer nur linear, wie ihr in der Vorlesung vom 23.04. gelernt habt. Den Fall eines Referenzvierecks mit quadratischen Formfunktionen bearbeitet ihr im nächsten Beispiel:

Aufgabe 22: (Theorie, 3 Punkte) Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ und bezeichne $Q_k(M)$ die folgende Menge von Polynomen:

$$Q_k(M) = \{p : M \rightarrow \mathbb{R} : p(x_1, x_2) = \sum_{0 \leq i, j \leq k} c_{ij} x_1^i x_2^j\}$$

Das Referenzviereck \hat{T} sei gegeben durch:

$$\hat{T} := [0, 1] \times [0, 1] = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$



- a) Zeige, dass durch Vorgabe von Werten in den Ecken (=Knoten) von \hat{T} eindeutig eine Funktion $p \in Q_1(\hat{T})$ bestimmt ist und gebe die nodale Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ an mit $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$. Verwende dabei eine Darstellung mittels linearer Formfunktionen des Einheitsintervalls.
- b) Gebe die nodale Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_9$ bzgl. P_1, \dots, P_9 für $Q_2(\hat{T})$ an unter Zuhilfenahme quadratischer Formfunktionen auf dem Einheitsintervall.

Ritz-Projektion

Projektionen und Interpolationen spielen eine wichtige Rolle in der Analysis von Finiten Element Methoden. Da wir mit Teilräumen der ursprünglichen Funktionenräume der Variationsformulierung arbeiten, muss der Fehler der Projektionen beachtet werden. Im folgenden Beispiel betrachten wir die Ritz-Projektion genauer.

Aufgabe 23: (Theorie, 3 Punkte) Sei V ein Hilbertraum und $V_h \subset V$ ein abgeschlossener Teilraum. Für eine stetige und koerzive Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert $R_h : V \rightarrow V_h$ mit

$$a(R_h v, v_h) = a(v, v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h$$

die Ritz-Projektion. Zeige:

- $R_h : V \rightarrow V_h$ ist wohl definiert, linear und stetig, wenn V_h ein Unterraum von V ist.
- Für R_h gilt die quasi-optimale Fehlerabschätzung:

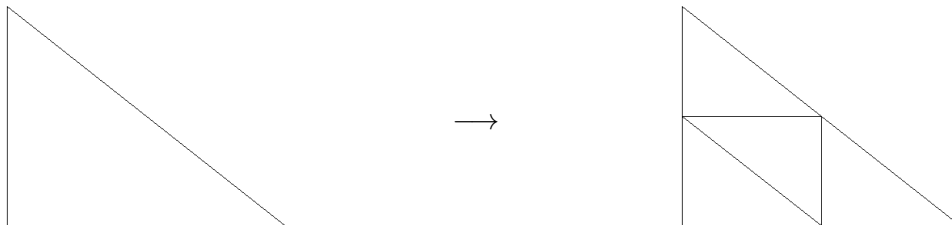
$$\|v - R_h v\|_V \leq \frac{\beta}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V,$$

wobei α die Koerzivitätskonstante und β die Beschränktheitskonstante von $a(\cdot, \cdot)$ ist.

2D FEM - Netzverfeinerung

Sowohl in der Übung als auch in der Vorlesung habt ihr bereits gesehen, wie Netzverfeinerung funktioniert. Um zu sehen wie wichtig dabei die Datenverwaltung ist, beschäftigen wir uns mit diesem wichtigen ersten Schritt der Diskretisierung im nächsten Beispiel. Betrachtet ebenso das Beispiel aus der Vorlesung von 5.5.

Aufgabe 24: (Theorie, 4 Punkte) Beschreibe eine uniforme, zulässige Verfeinerung einer Triangulierung mittels Pseudocode. Die neuen Punkte sollen die Kantenmittelpunkte und die neuen Elemente die vier resultierenden Dreiecke sein. Achte darauf, keine neuen Punkte zweimal zu erstellen.



Verwende die Triangulierung \mathcal{T}_N , welche durch die Dateien `coordinates.dat` und `elements.dat` beschrieben wird. In der Datei `coordinates.dat` beschreibt die k -te Zeile die Koordinaten des Knotens x_k . In der Datei `elements.dat` beschreibt die l -te Zeile die Indizes l_1, l_2 und l_3 der Knoten des Dreiecks τ_l . Erkläre den Pseudocode mittels eines Verfeinerungsschrittes.

Konditionszahl und das CG Verfahren

Aufgabe 25: (Theorie, 4 Punkte)

a) Betrachte das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

und die dazugehörige FEM-Steifigkeitsmatrix $A_h \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ für den Ansatzraum von stückweise linearen Funktionen bzgl. einer gleichmäßigen Unterteilung des Intervalls $[0, 1]$ mit Maschenweite $h = \frac{1}{N}$. Zeige, dass eine Konstante $c > 0$ unabhängig von h existiert mit

$$\kappa_2(A_h) \leq ch^{-2}.$$

Hinweis: Man verwende die Formel für die Darstellung von Eigenwerten für Tridiagonalmatrizen aus der Vorlesung "Numerische Mathematik 2":

$$\lambda_k = a + 2\text{sign}(c)\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right), \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Dabei bezeichnen a die Diagonaleinträge, b die Einträge der oberen Nebendiagonale und c die Einträge der unteren Nebendiagonale.

b) Gehe davon aus, dass durch Halbierung der Maschenweite sich die Konditionszahl der FEM-Steifigkeitsmatrix vervierfacht. Zeige, dass sich beim CG-Verfahren bei asymptotischer Betrachtung, die Anzahl der hinreichenden Iterationsschritte k um eine gewisse Fehlerschranke ε zu unterschreiten,

$$\frac{\|\underline{u}^k - \underline{u}\|_A}{\|\underline{u}^0 - \underline{u}\|_A} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa_2(A)} - 1}{\sqrt{\kappa_2(A)} + 1} \right)^k < \varepsilon,$$

verdoppelt.

1D FEM - BPX

Vorkonditionierung ist ein sehr wichtiges Tool bei der Berechnung von Gleichungssystemen. Was es genau bewirken kann, seht ihr im nächsten Beispiel. Bevor ihr das Beispiel löst, lest euch die entsprechenden Kapitel der Vorlesung noch einmal durch.

