

Numerische Mathematik 3

FEM, 22. Juni 2020

Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu &= f && \text{in } (0, 1)^2, \\ \alpha u + A \frac{\partial u}{\partial n} &= g_R && \text{auf } \Gamma_R = \{ (x, y) \mid x = 0, 0 < y < 1 \}, \\ u &= g_D && \text{auf } \Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_R \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) &= \frac{\exp(x_1 x_2^2)}{(1 + x_1)}, \\ c(x_1, x_2) &= \sin\left(\left(x_1 x_2 + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right), \\ f(x_1, x_2) &= \sin\left(\left(x_1 x_2 + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) \left((1 + x_1)^2 + x_2^2\right) - 2 \exp(x_1 x_2^2) \left(x_2^2 + \frac{1 + 2x_1 x_2^2}{1 + x_1}\right), \\ \alpha(x_1, x_2) &= 3, \\ g_D(x_1, x_2) &= (1 + x_1)^2 + x_2^2, \\ g_R(x_1, x_2) &= 3 \left((1 + x_1)^2 + x_2^2\right) - \frac{\exp(x_1 x_2^2)}{(1 + x_1)} 2(x_1 + 1). \end{aligned}$$

Teil 1: Leite eine Galerkin Bubnov Variationsformulierung her und zeige deren eindeutige Lösbarkeit.

Teil 2: Wähle für den Test- und Ansatzraum V_h den Raum der stückweise linearen und global stetigen Funktionen $\{\varphi_i\}_i$. Stelle mit diesen Funktionen das zugehörige Gleichungssystem der Variationsformulierung auf. Berechne die lokalen, gewichteten Matrizeneinträge der Steifigkeits- und Massmatrix sowie die Beiträge der Randintegrale.

Teil 3: Implementiere nun die Assemblierung des Gleichungssystems in Matlab/Octave. Sortiere dafür die Freiheitsgrade nach Dirichletknoten und andere Knoten. (vergleiche Beispiel 13) Zerlege danach das Gleichungssystem in Beiträge der bekannten Freiheitsgrade am Rand und das Gleichungssystem für die unbekanntenen Freiheitsgrade. Verwende für die zweidimensionalen Integrale die 7-Punkt-Gauß-Formel. Berechne die Lösung für das gegebene Mesh und den $L^2(\Omega)$ - und $H^1(\Omega)$ -Fehler der Approximation der exakten Lösung

$$u(x_1, x_2) = (1 + x_1)^2 + x_2^2.$$

Teil 4: Verfeinere gleichmäßig mittels der Funktion `refineMesh` und der Eingabe der Robin statt den Neumann-Rändern und erstelle eine Fehlertabelle für die Verfeinerungslevel $L = 0, \dots, 6$ der Form

L	M	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	eoc	$\ u - u_h\ _{H^1(\Omega)}$	eoc
0	9	7.8477e-02	0.00	4.1162e-01	0.00
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Welches Verhalten ist zu sehen? Wie kann es erklärt werden? Was ist über die Konvergenzrate aus der Vorlesung bekannt?

Verwende mindestens eine andere Methode (GMRES, BigStab,...) zur Lösung des Gleichungssystems. Wie verändern sich die Ergebnisse? Was könnte verbessert werden?