Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. O. Steinbach
Dipl.–Ing. Mario Gobrial

SS 2022
Blatt 3
7.4.2022

Numerische Mathematik 3

Man realisiere die folgenden Aufgaben in der Programmiersprache Ihrer Wahl.

11. Für das Gebiet $\Omega = (0,1)$ sei eine Unterteilung in 2 finite Elemente τ_ℓ gegeben,

$$\tau_1 = (x_1, x_3), \quad \tau_2 = (x_3, x_2),$$

mit den Knoten

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{2}\,.$$

Durch die Definition der Element–Mittelpunkte

$$x_4 = \frac{1}{4}, \quad x_5 = \frac{3}{4}$$

erhält man eine neue Unterteilung mit den Elementen

$$\tau_1 = (x_1, x_4), \quad \tau_2 = (x_4, x_3), \quad \tau_3 = (x_3, x_5), \quad \tau_4 = (x_5, x_2).$$

Man realisiere diesen Algorithmus rekursiv bis zu einem vorgegebenen Level L. Man erhält eine Liste von (nicht geordneten) Knoten $\{x_k\}_{k=1}^M$ und eine Liste von Elementen τ_ℓ, welche durch die Indizees ℓ_1 und ℓ_2 ihrer Knoten x_{ℓ_1} und x_{ℓ_2} bestimmt sind.

12. Gegeben sei der Raum $V_h = \operatorname{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M \subset H^1(0,1)$ der stückweise linearen und global stetigen Basisfunktionen φ_k, und das lineare Gleichungssystem $M_h \underline{u} = \underline{f}$ der L^2 Projektion mit

$$M_h[j,k] = \int_0^1 \varphi_k(x)\varphi_j(x)\,dx, \quad f_j = \int_0^1 u(x)\varphi_j(x)\,dx\,.$$

Für $u(x) = \sin \pi x$ berechne man die lokalen Einträge des globalen Lastvektors $\underline{f}$, d.h. für jedes Element $\tau_\ell = (x_{\ell_1}, x_{\ell_2})$ ist

$$f_{\ell_1} = \int_{x_{\ell_1}}^{x_{\ell_2}} u(x)\frac{x_{\ell_2} - x}{x_{\ell_2} - x_{\ell_1}}\,dx, \quad f_{\ell_2} = \int_{x_{\ell_1}}^{x_{\ell_2}} u(x)\frac{x - x_{\ell_1}}{x_{\ell_2} - x_{\ell_1}}\,dx$$

und assembliere diese. Die Berechnung der Integrale kann sowohl analytisch als auch numerisch realisiert werden.

13. Wie in Aufgabe **12.** diskutiere man die Realisierung des Matrix–Vektor Produktes $\underline{v} = M_h \underline{u}$, wenn $\underline{u}$ gegeben ist. Insbesondere berechne man die lokalen Matrix–Vektor Produkte durch Lokalisierung von $\underline{u}$, und assembliere die lokalen Ergebnisse zum globalen Vektor $\underline{v}$.

14. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $M_h \underline{u} = \underline{f}$ wende man das CG Verfahren mit einer relativen Abbruchschranke von $\varepsilon = 10^{-8}$ und einer Startnäherung $\underline{u}^0 = \underline{0}$ an, und dokumentiere die Anzahl der notwendigen Iterationen für eine Folge von Verfeienerungen.

15. Für die in Aufgabe **14.** vorgenommenen Rechnungen berechne man den Fehler

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 \, dx = \sum_{\ell=1}^N \int_{x_{\ell_1}}^{x_{\ell_2}} [u(x) - u_h(x)]^2 \, dx$$

durch Verwendung einer geeigneten numerischen Integrationsformel.