

Numerische Mathematik 3

11. Sei $\tau_\ell \subset \mathbb{R}^3$ ein durch die Knoten $\{x_{\ell_i}\}_{i=1}^4$ beschriebenes finites Element. Man gebe eine lokale Parametrisierung bezüglich des Referenzelementes τ mit den Knoten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ an und berechne das Volumen Δ_ℓ .

12. Für das in Aufgabe **11.** beschriebene und als formregulär vorausgesetzte finite Element τ_ℓ sei

$$J_\ell = \begin{pmatrix} x_{\ell_2,1} - x_{\ell_1,1} & x_{\ell_3,1} - x_{\ell_1,1} & x_{\ell_4,1} - x_{\ell_1,1} \\ x_{\ell_2,2} - x_{\ell_1,2} & x_{\ell_3,2} - x_{\ell_1,2} & x_{\ell_4,2} - x_{\ell_1,2} \\ x_{\ell_2,3} - x_{\ell_1,3} & x_{\ell_3,3} - x_{\ell_1,3} & x_{\ell_4,3} - x_{\ell_1,3} \end{pmatrix}.$$

Man leite Abschätzungen $A \leq \lambda_{\min}(J_\ell^\top J_\ell) \leq \lambda_{\max}(J_\ell^\top J_\ell) \leq B$ für geeignete A und B in Abhängigkeit der lokalen Maschenweite h_ℓ her.

13. Gegeben sei das finite Element $\tau_\ell = (x_{\ell_1}, x_{\ell_2})$ mit der lokalen Maschenweite $h_\ell = \Delta_\ell$. Bezüglich der im Referenzelement τ gegebenen Formfunktionen

$$\psi_1(\eta) = 1 - \eta, \quad \psi_2(\eta) = \eta, \quad \psi_3(\eta) = 4\eta(1 - \eta) \quad \text{für } \eta \in \tau = (0, 1)$$

stelle man die Gramsche Matrix G_ℓ mit den Einträgen

$$G_\ell[j, i] = \Delta_\ell \int_0^1 \psi_i(\eta) \psi_j(\eta) d\eta \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3$$

auf und berechne deren Eigenwerte.

14. Für $x \in \tau_\ell$ sei $v_h(x)$ durch die in Aufgabe **13.** beschriebenen Formfunktionen gegeben. Man beweise die inverse Ungleichung

$$\|v_h'\|_{L^2(\tau_\ell)}^2 \leq c_I h_\ell^{-2} \|v_h\|_{L^2(\tau_\ell)}^2.$$

15. Das Gebiet $\Omega = (0, 1)$ soll in n finite Elemente (x_{k-1}, x_k) , $k = 1, \dots, n$ mit Knoten $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ und lokalen Maschenweiten $h_k = x_k - x_{k-1}$ für $k = 1, \dots, n$ unterteilt werden. Dabei soll eine geometrisch skalierte Verfeinerung mit $h_{k+1} = qh_k$ für $k = 1, \dots, n-1$ und $q > 1$ verwendet werden. Für vorgegebenes q und n bestimme man

$$h_{\min}, \quad h_{\max}, \quad \frac{h_{\max}}{h_{\min}}.$$

Man veranschauliche die Ergebnisse für alle möglichen Kombinationen von $q = 1.5$ und $q = 2$ bzw. $n = 4$ und $n = 8$. Stellen Sie die Unterteilungen graphisch dar!