

### Numerische Mathematik 3

Man realisiere die folgenden Aufgaben in der Programmiersprache Ihrer Wahl.

**16.** Für das Gebiet  $\Omega = (0, 1)$  sei eine Unterteilung in 2 finite Elemente  $\tau_\ell$  gegeben,

$$\tau_1 = (x_1, x_3), \quad \tau_2 = (x_3, x_2),$$

mit den Knoten

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

Durch die Definition der Element–Mittelpunkte

$$x_4 = \frac{1}{4}, \quad x_5 = \frac{3}{4}$$

erhält man eine neue Unterteilung mit den Elementen

$$\tau_1 = (x_1, x_4), \quad \tau_2 = (x_4, x_3), \quad \tau_3 = (x_3, x_5), \quad \tau_4 = (x_5, x_2).$$

Man realisiere diesen Algorithmus rekursiv bis zu einem vorgegebenen Level  $L$ . Man erhält eine Liste von (nicht geordneten) Knoten  $\{x_k\}_{k=1}^M$  und eine Liste von Elementen  $\tau_\ell$ , welche durch die Indizes  $\ell_1$  und  $\ell_2$  ihrer Knoten  $x_{\ell_1}$  und  $x_{\ell_2}$  bestimmt sind.

**17.** Gegeben sei der Raum  $V_h = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M \subset H^1(0, 1)$  der stückweise linearen und global stetigen Basisfunktionen  $\varphi_k$ , und das lineare Gleichungssystem  $M_h \underline{u} = \underline{f}$  der  $L^2$  Projektion mit

$$M_h[j, k] = \int_0^1 \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx, \quad f_j = \int_0^1 u(x) \varphi_j(x) dx.$$

Für  $u(x) = \sin \pi x$  berechne man die lokalen Einträge des globalen Lastvektors  $\underline{f}$ , d.h. für jedes Element  $\tau_\ell = (x_{\ell_1}, x_{\ell_2})$  ist

$$f_{\ell_1} = \int_{x_{\ell_1}}^{x_{\ell_2}} u(x) \frac{x_{\ell_2} - x}{x_{\ell_2} - x_{\ell_1}} dx, \quad f_{\ell_2} = \int_{x_{\ell_1}}^{x_{\ell_2}} u(x) \frac{x - x_{\ell_1}}{x_{\ell_2} - x_{\ell_1}} dx$$

und assembliere diese. Die Berechnung der Integrale kann sowohl analytisch als auch numerisch realisiert werden.

**18.** Man diskutiere die Realisierung des Matrix–Vektor Produktes  $\underline{v} = M_h \underline{u}$ , wenn  $\underline{u}$  gegeben ist. Insbesondere berechne man die lokalen Matrix–Vektor Produkte durch Lokalisierung von  $\underline{u}$ , und assembliere die lokalen Ergebnisse zum globalen Vektor  $\underline{v}$ .

**19.** Zur Lösung des linearen Gleichungssystems  $M_h \underline{u} = \underline{f}$  wende man das CG Verfahren mit einer relativen Abbruchschranke von  $\varepsilon = 10^{-8}$  und einer Startnäherung  $\underline{u}^0 = \underline{0}$  an, und dokumentiere die Anzahl der notwendigen Iterationen für eine Folge von Verfeinerungen.

**20.** Für die in Aufgabe **19.** vorgenommenen Rechnungen berechne man den Fehler

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 [u(x) - u_h(x)]^2 dx = \sum_{\ell=1}^N \int_{x_{\ell_1}}^{x_{\ell_2}} [u(x) - u_h(x)]^2 dx$$

durch Verwendung einer geeigneten numerischen Integrationsformel.