Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. O. Steinbach
Dipl.–Ing. Mario Gobrial

SS 2022
Blatt 4
5.5.2022

Numerische Mathematik 3

16. Das Gebiet $\Omega = (0,1)$ soll in n finite Elemente (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \ldots, n$ mit Knoten $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n$ und lokalen Maschenweiten $h_k = x_k - x_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, n$ unterteilt werden. Dabei soll eine geometrisch skalierte Verfeinerung mit $h_{k+1} = q h_k$ für $k = 1, \ldots, n-1$ und $q > 1$ verwendet werden. Für vorgegebenes q und n bestimme man

$$h_{\min}, \quad h_{\max}, \quad \frac{h_{\max}}{h_{\min}}.$$

Man veranschauliche die Ergebnisse für alle möglichen Kombinationen von $q = 1.5$ und $q = 2$ bzw. $n = 4$ und $n = 8$. Stellen Sie die Unterteilungen graphisch dar!

17. Gegeben sei eine zulässige global quasi–uniforme Unterteilung des beschränkten Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in formreguläre finite Simplex–Elemente $\{\tau_\ell\}_{\ell=1}^N$. Der Raum der stückweise konstanten Basisfunktionen sei durch $S_h^0(\Omega) = \operatorname{span}\{\psi_\ell\}_{\ell=1}^N \subset L^2(\Omega)$ gegeben. Die L^2 Projektion $Q_h u \in L^2(\Omega)$ ist als eindeutig bestimmte Lösung der Variationsformulierung

$$\int_\Omega Q_h u(x)\, v_h(x)\, dx = \int_\Omega u(x)\, v_h(x)\, dx \quad \text{für alle } v_h \in S_h^0(\Omega)$$

bestimmt. Geben Sie die Formel zur Berechnung der Koeffizienten von $Q_h u \in S_h^0(\Omega)$ an. Analog zur Fehlerabschätzung der stückweise linear Interpolierenden mittels Bramble–Hilbert Lemma leite man eine Abschätzung für den Fehler $\|u - Q_h u\|_{L^2(\Omega)}$ her. Dabei wird $u \in H^1(\Omega)$ vorausgesetzt.

18. Gegeben sei die in Aufgabe **17.** erklärte L^2 Projektion $Q_h u \in S_h^0(\Omega)$, wobei $u \in H^1(\Omega)$ vorausgesetzt wird. Man gebe eine Abschäzung für den Fehler

$$\|u - Q_h u\|_{[H^1(\Omega)]'} = \sup_{0 \neq v \in H^1(\Omega)} \frac{\langle u - Q_h u, v\rangle_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

an.

19. Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wird das Neumann–Randwertproblem

$$-\Delta u(x) + u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial n_x} u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega$$

betrachtet. Man gebe die Variationsformulierung in $H^1(\Omega)$ an und leite eine Fehlerabschätzung in $H^1(\Omega)$ für stückweise lineare und global stetige Basisfunktionen her. Dabei kann $u \in H^2(\Omega)$ vorausgesetzt werden, d.h. $f \in L^2(\Omega)$. Für eine einfachere Implementierung wird die Auswertung der rechten Seite f durch ihre L^2 Projektion $Q_h f \in S_h^0(\Omega)$ ersetzt. Für die Lösung der gestörten Variationsformulierung gebe man die entsprechende Fehlerabschätzung an. Was ändert sich, wenn $Q_h f \in S_h^0(\Omega)$ durch die Interpolierende $I_h f \in S_h^0(\Omega)$ mit $I_h f(x_\ell^*) = f(x_\ell^*)$ in den Elementmittelpunkten x_ℓ^* ersetzt wird?