Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. O. Steinbach
Dipl.–Ing. Mario Gobrial

SS 2022
Blatt 6
10.6.2022

Numerische Mathematik 3

25. Für eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ sei

$$A = M + \underline{a}\,\underline{b}^\top .$$

Unter welcher Voraussetzung ist A invertierbar, wie lautet die inverse Matrix?
Hinweis: Man verwende den Ansatz

$$A^{-1} = M^{-1} + \alpha M^{-1} \underline{a}\,\underline{b}^\top M^{-1} .$$

26. Für das singulär gestörte Randwertproblem ($\varrho > 0$)

$$-\varrho\,\Delta u(x) + u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega$$

leite man einen Vorkonditionierungsoperator $B : H^{-1}(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$ her, welcher robust bezüglich $\varrho \to 0$ ist.

27. Gegeben sei die symmetrische und positive definite Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & D \end{pmatrix} .$$

Man zeige, dass das Schur Komplement

$$S = D - B^\top A^{-1} B$$

positiv definit ist.

28. Für die in Aufgabe **27.** betrachtete Matrix M leite man eine Faktorisierung der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

her. Wie kann daraus eine Vorkonditionierung für M hergeleitet werden?