

### Numerische Mathematik 3

Betrachtet werde das Dirichlet Randwertproblem

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega = (0, 2) \times (0, 1), \quad u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega,$$

mit den Teilgebieten

$$\Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1), \quad \Omega_2 = (1, 2) \times (0, 1).$$

**29.** Man betrachte eine konforme Diskretisierung des Dirichlet Randwertproblems, wobei das Interface  $\{1\} \times (0, 1)$  durch das FE Netz aufgelöst wird. Man beschreibe das lineare Gleichungssystem mit lokalen Freiheitsgraden in den Teilgebieten, und globalen Freiheitsgraden auf dem Interface. Welches Gleichungssystem ist zu lösen, wenn die lokalen Freiheitsgrade eliminiert werden. Wie könnte eine mögliche Vorkonditionierung gewählt werden?

**30.** Man betrachte das lineare Gleichungssystem wie in Aufgabe **29**. Für dessen Lösung werden jetzt die lokalen Freiheitsgrade auch am Interface betrachtet. Die Stetigkeit kann dann durch diskrete Lagrange-Parameter gewährleistet werden. Welches lineare Gleichungssystem ergibt sich nach Eliminierung der lokalen Freiheitsgrade  $u_i$ .

**31.** Für die Lösung des Dirichlet Randwertproblems betrachten wir das Transmissionsproblem ( $i = 1, 2$ )

$$-\Delta u_i(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega_i, \quad u_i(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega,$$

mit den Transmissionsbedingungen

$$u_1(x) = u_2(x), \quad \frac{\partial}{\partial n_1} u_1(x) + \frac{\partial}{\partial n_2} u_2(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2.$$

Durch Einführen eines Lagrange Multiplikators  $\lambda := n_1 \cdot \nabla u_1$  leite man eine gemischte Variationsformulierung her und diskutiere deren eindeutige Lösbarkeit.

**32.** Für die in Aufgabe **31**. betrachtete Variationsformulierung diskutiere man eine geeignete Diskretisierung. Was ist zu beachten, um eindeutige Lösbarkeit zu gewährleisten.

**33.** Unter welchen Voraussetzungen stimmen die linearen Gleichungssysteme aus den Aufgaben **30**. und **32**. überein?