

1 Metrische Räume

Aufgabe 1.1: Bei welcher der folgenden Abbildungen $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ handelt es sich um Metriken?

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| i) $d(x, y) = x - y $ | iv) $d(x, y) = 1 + x - y $ | vii) $d(x, y) = \max\{ x , y \}$ |
| ii) $d(x, y) = 2 x - y $ | v) $d(x, y) = (x - y)^2$ | viii) $d(x, y) = x - y$ |
| iii) $d(x, y) = x - 2y $ | vi) $d(x, y) = \max\{x, y\}$ | ix) $d(x, y) = x^2 - y^2 $ |

Aufgabe 1.2: Welche der folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$ sind offen bzw. abgeschlossen.

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| i) $M = \mathbb{R}$ | iv) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\}$ |
| ii) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x^2 < 1\}$ | v) $M = \{\arctan(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ |
| iii) $M = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < \frac{x^2}{1+x^2} \leq 1\right\}$ | vi) $M = \left\{\frac{x}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ |

2 Folgen

Aufgabe 2.1: Entscheiden Sie welche der folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie ihn gegebenenfalls.

- | | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{2+n}$ | v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n+4)^2}{12n} - \frac{n}{3}\right)$ | ix) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ |
| ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(n)}{n^2+1}$ | vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ | x) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2n^2}$ |
| iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n (n^2+n)+1}{-2n^2+3}$ | vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{3n+2}$ | xi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a}$, für $a > 0$ |
| iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^3} + \sqrt[3]{n}}{3 \sqrt[n]{n} + \sqrt[3]{3n}}$ | viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$ | xii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ |
- xiii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+a^n}{n-a^n}$?

Aufgabe 2.3: Überprüfen Sie die Konvergenz der folgenden rekursiv definierten Folgen und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

- a) $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}$
b) $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

3 Reihen

Aufgabe 3.1: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Der explizite Wert der Reihe muss nicht bestimmt werden

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^k)^2}{k^{k^2}}$	vi) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$	xi) $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-k}$
ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$	vii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$	xii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin(\frac{1}{k})$
iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2}$	viii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (1+\frac{1}{k})^k}{k}$	xiii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh(k)}$
iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$	ix) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^3}$	xiv) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(k)}{k^2}$
v) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$	x) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{2k-1}$	xv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{(2k+1)(k+2)}$

Aufgabe 3.2: Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$	e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$	d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$	f) $\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$

4 Stetige Funktionen

Aufgabe 4.1: Überprüfen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen.

i) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$	ii) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$	iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x^2}, & x < 0. \end{cases}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------

iv) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax-6}{x-2}, & x \neq 2, \\ 5, & x = 2. \end{cases}$ stetig?

5 Ableitung

Aufgabe 5.1: Bilden Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

i) $f(x) = \frac{3x^2\sqrt{2x+5}}{3x+1}$	v) $f(x) = 2^x$	ix) $f(x) = e^{x^2-1}$
ii) $f(x) = x^2 \ln(x)$	vi) $f(x) = e^{e^x}$	x) $f(x) = x^2 \sin(x) e^{-x}$
iii) $f(x) = \frac{3x+4}{x^2}$	vii) $f(x) = 10^{-x}$	xi) $f(x) = \frac{x^2}{-x^3+6x-4}$
iv) $f(x) = 5xe^x + 4x^3$	viii) $f(x) = x (x + x)$	x) $f(x) = \arcsin(x)$

Aufgabe 5.2: Überprüfen Sie welche der folgenden Funktionen differenzierbar ist.

i) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0, \\ 1+x^2, & x > 0. \end{cases}$	ii) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 1+\sin(x), & x < 0. \end{cases}$	iii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$
---------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------

iv) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1+ax-bx^2, & x \leq 0, \\ x^2+c, & x > 0. \end{cases}$ differenzierbar.

Aufgabe 5.3: Bestimmen Sie das Talyor polynom 3. Ordnung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Geben Sie auch das Restglied an.

6 Integration

Aufgabe 6.1: Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale

i) $\int \frac{\ln(x^2)}{x^2} dx$

vi) $\int \frac{1}{x(1+\ln(x))} dx$

xi) $\int \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$

ii) $\int x^2 \sqrt{1-x} dx$

vii) $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$

xii) $\int \frac{x^2+2x+2}{x^3+3x^2+6x+12} dx$

iii) $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)-\sin^2(x)} dx$

viii) $\int \cos(e^{\sin(x)})e^{\sin(x)} \cos(x) dx$

xiii) $\int \sin^2(x) dx$

iv) $\int \frac{e^x \sinh(x)}{1+e^x} dx$

ix) $\int e^{\sin(x)} \cos(x) dx$

xiv) $\int \frac{\tan(x)}{\cos(x)} dx$

v) $\int \sin^2(x) \cos(x) dx$

x) $\int \cosh(e^x) e^{2x} dx$

xv) $\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} dx$