Uni Graz
TU Graz

O. Orasch, F. Skrilic, M. Unzog,
J. Pomper, B. Riederer, P. Schlosser

Lineare Algebra

WS 2018/19

2. Übungsblatt

25. Okt. 2018

Zusammenfassung Vektorraum: Damit ein Quadrupel $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ein reeller bzw. komplexer Vektorraum ist, müssen für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ die folgenden Axiome erfüllt sein:

(I) Es existiert ein Element $\mathbf{0} \in V$, sodass $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in V$ gilt;

(II) Zu jedem Element $\mathbf{v} \in V$ existiert ein inverses Element $\mathbf{v}_{\text{inv}} \in V$, sodass $\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{inv}} = \mathbf{0}$;

(III) $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u})$;

(IV) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$;

(V) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = (\alpha \cdot \mathbf{v}) + (\beta \cdot \mathbf{v})$;

(VI) $\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\alpha \cdot \mathbf{v}) + (\alpha \cdot \mathbf{w})$;

(VII) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{v}$;

(VIII) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Weiters ist in den Definitionen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ implizit enthalten, dass auch:

(0a) die Summe zweier Vektoren $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ wieder ein Element in V sein muss.

(0b) die Multiplikation $\alpha \cdot \mathbf{v}$ von Zahl mit Vektor wieder ein Element in V sein muss.

Aufgabe 7: Überprüfe, welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ reelle Vektorräume sind:[1]

a) $W_a = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \geq 0 \right\}$

b) $W_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$

c) $W_c = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$

d) $W_d = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 = 1 \right\}$

Aufgabe 8:

a) Zeige, dass die Menge
$$\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$$
der komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ zusammen mit den Verknüpfungen
$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \quad && \forall x \in \mathbb{R}, \\ (\alpha \cdot f)(x) &:= \alpha \cdot f(x), && \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$
ein komplexer Vektorraum ist.

b) Zeige weiters, dass auch die Menge der beschränkten Funktionen
$$\text{Abb}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \exists M \geq 0 \text{ sodass } |f(x)| \leq M \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$
ein Vektorraum ist.[1]

[1] Weiss man bereits, dass $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ ein Vektorraum ist, und will überprüfen ob für eine Teilmenge $U \subseteq V$ das Quadrupel $(U, +, \mathbb{K}, \cdot)$ ebenfalls ein Vektorraum ist, so sind die Rechenregeln III – VIII automatisch erfüllt und es müssen nur 0a, 0b I, II überprüft werden.

Aufgabe 9:

a) Zeige, dass für festes $n \in \mathbb{N}_0$ der Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n,

$$P_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;\middle|\; (a_k)_{k=0}^{n} \in \mathbb{R} \right\},$$

mit den Verknüpfungen

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \right) := \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k,$$
$$\alpha \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) := \sum_{k=0}^{n} (\alpha \cdot a_k) x^k,$$

ein reeller Vektorraum ist.

b) Zeige weiters, dass der Raum der Polynome mit Polynomgrad genau n,

$$Q_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;\middle|\; (a_k)_{k=0}^{n} \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \neq 0 \right\},$$

<u>kein</u> reeller Vektorraum ist.

Aufgabe 10: Sei $(V, +, \mathbb{C}, \cdot)$ ein komplexer Vektorraum und $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in V$ zwei beliebige aber festgehaltene Vektoren. Zeige, dass die lineare Hülle

$$\operatorname{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\} := \{ \lambda_1 \cdot \mathbf{v_1} + \lambda_2 \cdot \mathbf{v_2} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \},$$

dieser Vektoren ebenfalls ein komplexer Vektorraum ist.[1] Halte bei jedem Rechenschritt fest, welches der Axiome I – VIII verwendet wird.

Aufgabe 11:

a) Zeige, dass für beliebige aber festgehaltene positive Zahlen $(r_k)_{k=1}^{n}$ die Abbildung

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{r,2} = \sum_{k=1}^{n} r_k v_k w_k,$$

für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Eine wichtige Rolle in der speziellen Relativitätstheorie spielt der sogenannte *Minkowski-Raum*. Mathematisch betrachtet ist dies der $\mathbb{R}^4$, ausgestattet mit der Abbildung

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\text{Mink}} = v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 - v_4 w_4.$$

Zeige, dass es sich hierbei um <u>kein</u> Skalarprodukt handelt.

Aufgabe 12*: Sei $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ ein reeller oder komplexer Vektorraum. Leite aus den Axiomen I – VIII die folgenden Rechenregeln ab:

a) $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, wobei 0 die reelle (komplexe) Zahl Null ist und $\mathbf{0}$ der Nullvektor aus Axiom I;

b) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

c) $\mathbf{v}_{\text{inv}} = (-1) \cdot \mathbf{v}$;

d) Wenn $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, dann ist entweder $\alpha = 0$ oder $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.