Uni Graz
TU Graz

O. Orasch, F. Skrilic, M. Unzog,
J. Pomper, B. Riederer, P. Schlosser

Lineare Algebra

WS 2018/19

6. Übungsblatt

29. Nov. 2018

Aufgabe 31: Zeigen Sie, dass alle linearen Operatoren $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Form

$$T(x) = kx, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

für ein $k \in \mathbb{R}$ haben.

Hinweis: Diese Aufgabe kann in einer Zeile gelöst werden.

Aufgabe 32: Berechnen Sie jeweils die Produkte AB und BA der folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 33: Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$ ein Winkel. Berechne die Matrix $M_\alpha \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit der ein beliebiger Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ multipliziert werden muss, um ihn um den Winkel α gegen die Uhrzeigersinn zu drehen.

Hinweis: Berechne, wie die Matrix M_α auf die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wirken sollte.

Aufgabe 34:

a) Betrachte den linearen Operator

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und berechne die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasen

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Berechne die darstellende Matrix des linearen Operators (1) bezüglich der Basen

$$\tilde{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \tilde{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 35: Seien V, W zwei endlichdimensionale Vektorräume und $T : V \to W$ ein linearer Operator. Benutze die aus der Vorlesung bekannte Formel

$$\dim(V) = \dim\ker(T) + \dim\operatorname{ran}(T)$$

um die folgenden Aussagen zu zeigen.

a) Ist $\dim(V) = \dim(W)$ dann gilt:

$$T \text{ injektiv} \Leftrightarrow T \text{ surjektiv}.$$

b) Ist $\dim(V) < \dim(W)$ dann ist T keinesfalls surjektiv.

c) Ist $\dim(V) > \dim(W)$ dann ist T keinesfalls injektiv.

Aufgabe 36: Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix mit der Eigenschaft $M \cdot M = M$. Beweise, dass für diese Matrix[1]

a) $\ker(M) = \operatorname{ran}(1 - M)$,

b) $\mathbb{R}^n = \ker(M) + \operatorname{ran}(M)$.

---

[1] Der Kern und der Range einer Matrix sind definiert durch
- $\ker(M) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid M\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\}$,
- $\operatorname{ran}(M) = \{\, M\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$,

wobei $M\mathbf{x}$ die Matrixmultiplikaton zwischen der Matrix M und dem Vektor $\mathbf{x}$ ist.