Uni Graz
TU Graz

O. Orasch, F. Skrilic, M. Unzog,
J. Pomper, B. Riederer, P. Schlosser

Lineare Algebra

WS 2018/19

Rechenbeispiele zur Prüfungsvorbereitung

1 Vektorraum, Norm, Skalarprodukt

Aufgabe 1: Bestimmen Sie welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume sind:

a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 \geq x_2 \right\}$ b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 = x_2^2 \right\}$

c) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = 1 \right\}$ d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} \mu + \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

eine Norm in $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie weiters alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_\infty = 1$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) := 2(x_1 y_1 + x_2 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.

2 Basis, Lineare Unabhängigkeit

Aufgabe 4: Stellen Sie fest ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind und ob sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden

$$a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_3 \right\}.$$

3 Lineare Abbildungen, Matrizen

Aufgabe 7: Gegeben sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\ker(F)$ und $\operatorname{ran}(F)$. Ist F injektiv, surjektiv, bijektiv?

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von F bezüglich der Standardbasis.

c) Bestimmen Sie die Adjungierte Abbildung $F^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 8: Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 10: Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 16 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 15 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 3x_4 &= 11 \end{aligned}$$

Aufgabe 11: Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ für die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) keine, b) genau eine, bzw. c) unendlich viele Lösungen besitzt.

5 Determinante

Aufgabe 12: Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$a)\ \det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 6 \end{pmatrix} \quad b)\ \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & 9 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad c)\ \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 9 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Eigenwerte, Diagonalisierung

Aufgabe 13: Bestimmen Sie alle Eigenwerte, sowie die jeweilige algebraische und geometrische Vielfachheit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie weiters eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix U, sodass $A = U^{-1}DU$.