Univ.-Prof. Dr. Jussi Behrndt

Funktionalanalysis und partielle DGL

7. Februar 2017

Schriftliche Prüfung

Name: ______________________________ Matr.-Nr.: __________________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden. Die Prüfung gilt mit 8 Punkten als bestanden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Viel Erfolg!

1. Teil

In diesem Teil werden nur die Lösungen bewertet. Jede Frage kann mit wahr (w) oder falsch (f) beantwortet werden. Es werden nur diese Symbole (w) und (f) als gültige Antworten in der Tabelle unten gewertet. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Gar nicht oder ungültig beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe liegt immer zwischen 0 und 4 Punkten.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es sei S ein beschränkter, selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr **(w)** oder falsch **(f)**?

Aussage:	(w) oder (f)
$i \in \rho(S)$	
$\sigma(S)$ ist beschränkt	
S hat höchstens endlich viele Eigenwerte	
S^2 ist selbstadjungiert	

Bitte wenden!

2. Teil

Die Aufgaben in diesem Teil sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Weisen Sie nach, dass der Operator $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{4}x_4, \frac{1}{6}x_6, \dots\right),$$

beschränkt ist.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad f_3(x) = x^3$$

im Hilbertraum $L^2(-1, 1)$. Untersuchen Sie, welche Paare von diesen Funktionen bzgl. des L^2-Skalarproduktes orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte (d.h. das Punktspektrum) und Eigenvektoren des linearen Operators

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \quad (x_n)_n \mapsto \left(\left(1 - \frac{i}{n}\right) x_n\right)_n.$$

Ist der Operator T kompakt?

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

(i) Wie sind der Kern $\ker T$ und das Bild $\operatorname{ran} T$ von T definiert?

(ii) Es sei $\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathbb{C}^3$ und T sei der durch die Matrix $M := y \cdot y^\top$ dargestellte lineare Operator, wobei $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^\top$, d.h.

$$T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \qquad Tx = Mx = y \cdot (y^\top \cdot x) = (x, y)y.$$

Bestimmen Sie $\ker T$ und $\operatorname{ran} T$.

Aufgabe 6: (2 Punkte)

Bestimmen Sie den Typ der partiellen Differentialgleichung im $\mathbb{R}^2$

$$(x^2 + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (y^2 + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}$$

(in Abhängigkeit vom Bereich, in dem die Punkte (x, y) liegen).