Uni Graz
TU Graz

J. Graspeuntner, C. Kern
M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

1. Übungsblatt 9. Oktober

Aufgabe 1
Wir betrachten den Raum $\mathbb{C}^{n\times n}$ der $n\times n$-Matrizen mit komplexen Einträgen.

(i) Zeigen Sie, dass für $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n, B=(b_{ij})_{i,j=1}^n\in\mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda\in\mathbb{C}$ auch die Summe $A+B$ und λA in $\mathbb{C}^{n\times n}$ liegen, wobei die Addition und Multiplikation hier komponentenweise zu verstehen sind:

$$(A+B)_{ij}:=a_{ij}+b_{ij}\quad\text{und}\quad(\lambda A)_{ij}:=\lambda a_{ij},\quad i,j\in\{1,\ldots,n\}.$$

Mit dieser Struktur wäre $\mathbb{C}^{n\times n}$ ein Vektorraum.

(ii) Definiere für Matrizen $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n, B=(b_{ij})_{i,j=1}^n\in\mathbb{C}^{n\times n}$ die Abbildung

$$(A,B)_F:=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\overline{b_{ij}}.$$

Zeigen Sie, dass $(\cdot,\cdot)_F$ ein Skalarprodukt auf der Menge der komplexwertigen $n\times n$-Matrizen definiert.

Aufgabe 2
Es sei für $-\infty<a<b<\infty$

$$C([a,b]):=\{f:[a,b]\to\mathbb{C}: f\text{ stetig auf }[a,b]\}$$

der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a,b]$.[1] Weiter sei die Abbildung $(\cdot,\cdot)_2: C([a,b])\times C([a,b])\to\mathbb{C}$ definiert als

$$(f,g)_2:=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,\quad f,g\in C([a,b]).$$

Zeigen Sie, dass $(\cdot,\cdot)_2$ ein Skalarprodukt auf $C([a,b])$ ist.[2]

Aufgabe 3
Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen zum Vektorraum $L^2(\mathbb{R})$ gehören, und berechnen Sie ggf. ihre L^2-Norm.

$$f_1(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{für } x>0,\\ 0 & \text{für } x\le 0,\end{cases}\qquad f_2(x)=x^2,\qquad f_3(x)=\frac{1}{x^2},\qquad f_4(x)=\begin{cases}1 & \text{für } |x|<3,\\ \frac{1}{x^2} & \text{für } |x|\ge 3.\end{cases}$$

[1] Man mache sich klar, dass die Summe von zwei stetigen Funktionen sowie das Produkt einer stetigen Funktion mit einem Skalar wieder stetige Funktionen sind. Daher ist $C([a,b])$ tatsächlich ein Vektorraum.
[2] D.h. $(C([a,b]),(\cdot,\cdot)_2)$ ist ein Prä-Hilbertraum.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen Normen auf den gegebenen Vektorräumen V sind:

(i) $V = \{(x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : x_n \text{ ist konvergent}\}$ mit $\|(x_n)\| := \lim_{n\to\infty} |x_n|$.

(ii) $V = \{(x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : x_n \text{ ist eine Nullfolge}\}$ mit $\|(x_n)\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Aufgabe 5

(i) Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ ein Prä-Hilbertraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Norm $\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Verifizieren Sie die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

(ii) Ist der normierte Raum $C([0,1])$ mit der Norm $\|f\| := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ ein Prähilbertraum?