Uni Graz | J. Graspeuntner, C. Kern
TU Graz | M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

10. Übungsblatt 11. Dezember

Aufgabe 46
Weisen Sie für die spezielle Funktion

$$f(x) := e^{-a|x|}, \qquad a > 0,$$

die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 \mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 \mathrm{d}\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 \mathrm{d}\xi} \geq \frac{1}{2} \tag{1}$$

nach, d.h. berechnen Sie $\mathcal{F}[f](\xi)$ und alle in (1) vorkommenden Integrale. Dafür dürfen (ohne Beweis) die folgenden Integrationsformeln verwendet werden:

$$\int \frac{t^2}{(a^2+t^2)^2} \mathrm{d}t = -\frac{t}{2(a^2+t^2)} + \frac{1}{2a} \arctan \frac{t}{a}$$
$$\int \frac{1}{(a^2+t^2)^2} \mathrm{d}t = \frac{t}{2a^2(a^2+t^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{t}{a}.$$

Die linke Seite in (1) stellt das Produkt der mittleren quadratischen Abweichungen der Dichtefunktionen $|f(x)^2|$ und $|\mathcal{F}[f](\xi)|^2$ (für den Ort und den Impuls eines Teilchens) von ihren Mittelwerten $\overline{x} = 0$ und $\overline{\xi} = 0$ dar.

Aufgabe 47
Lösen Sie mit dem Charakteristikenverfahren das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (2t+7)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t \in (0,\infty),$$
$$u(0,x) = u_0(x) = \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Skizzieren Sie die erhaltenen Charakteristiken und führen Sie die Probe durch.

Aufgabe 48
Lösen Sie mit dem Charakteristikenverfahren das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + e^t \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = x, \qquad u(0,x) = u_0(x) = \sin x.$$

Führen Sie die Probe durch.

Aufgabe 49
In diesem Beispiel untersuchen wir eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, für die das Charakteristikenverfahren keine eindeutige Lösung liefert. Betrachten Sie

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - x^2 \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t \in (0,\infty), \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $u_0 \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$.[1]

(i) Skizzieren Sie die Charakteristiken für das obige Problem (2).

(ii) Es sei $u_1 \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ beliebig. Zeigen Sie, dass

$$u(t,x) := \begin{cases} u_0\left(\frac{x}{1-xt}\right), & x < \frac{1}{t}, \\ u_1\left(\frac{x}{1-xt}\right), & x > \frac{1}{t}, \\ 0, & x = \frac{1}{t}, \end{cases}$$

eine Lösung von (2) ist.

Aufgabe 50
Klassifizieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung im $\mathbb{R}^2$:

(i) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3^{-x-y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

(ii) $e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = \sinh^2 x$;

(iii) $(\frac{\partial u}{\partial x})^3 + e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} u = \cos x$;

(iv) $e^{2y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos y$.

[1] $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ ist die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, d.h. für alle $f \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ existieren $m < M \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = 0$ für alle $x < m$ und $x > M$.