Uni Graz | J. Graspeuntner, C. Kern
TU Graz | M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) — WS 2018/19

13. Übungsblatt – etwas Wiederholung zur Funktionalanalysis — 22. Jänner

Aufgabe 61
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $L^\infty(I)$ der Vektorraum der beschränkten Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_\infty : L^\infty(I) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in I} |f(x)|, \quad f \in L^\infty(I),$$

eine Norm auf $L^\infty(I)$ ist.

Aufgabe 62
Gegeben seien eine beschränkte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und der Operator

$$T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (Tf)(x) = h(x)(f(x) - f(x - \pi)).$$

(i) Zeigen Sie, dass T beschränkt ist.

(ii) Bestimmen Sie den adjungierten Operator T^* von T.

Aufgabe 63
Überprüfen Sie, welcher der drei Operatoren $P_j : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, $j \in \{1, 2, 3\}$, eine Projektion bzw. eine Orthogonalprojektion ist:

(i) $P_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1, -x_1, 0, 0, \dots)$

(ii) $P_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_{42}, 0, 0, \dots)$

(iii) $P_3(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, \dots)$

Aufgabe 64
Betrachten Sie den Operator $T : L^2(0, 3) \to L^2(0, 3)$ mit $(Tf)(x) := h(x)f(x)$, wobei die Funktion h durch

$$h(x) := \begin{cases} 1, & x \in (0, 1], \\ i, & x \in (1, 2], \\ 4 + 2i, & x \in (2, 3), \end{cases}$$

gegeben ist.

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von T und die zugehörigen Eigenräume.

(ii) Beweisen Sie, dass $2 \in \rho(T)$.

Aufgabe 65
Lösen Sie das Sturm–Liouville-Eigenwertproblem mit Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -f''(x) &= \lambda f(x), \quad x \in (-\pi, \pi), \\ f(-\pi) &= 0 = f(\pi), \end{aligned}$$

für das Intervall $(-\pi, \pi)$, das heißt, bestimmen Sie alle Eigenwerte λ und die zugehörigen (hinreichend oft differenzierbaren) Eigenfunktionen $f \in L^2(-\pi, \pi)$.