Uni Graz | J. Graspeuntner, C. Kern
TU Graz | M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

2. Übungsblatt | 16. Oktober

Aufgabe 6
Es sei wie in Aufgabe 2 auf dem ersten Übungsblatt $C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : f \text{ stetig auf } [a,b]\}$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(f,g)_2 := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f,g \in C([a,b]).$$

Weisen Sie nach, dass dieser Raum nicht vollständig, also kein Hilbertraum, ist. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(i) Man wähle $[a,b] = [-1,1]$ und zeige, dass die Folge

$$f_n(x) := \begin{cases} e^{nx}, & x \in [-1,0], \\ 1, & x \in (0,1], \end{cases}$$

eine Cauchy-Folge bzgl. der L^2-Norm ist.

(ii) Berechnen Sie den Grenzwert f der Folge (f_n) und zeigen Sie, dass dieser nicht in $C([-1,1])$ liegt.

Aufgabe 7
Sei $-\infty < a < b < \infty$. Für beschränkte Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ betrachten wir die Normen

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^2} := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

(i) Zeigen Sie, dass jede Folge (f_n), die bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein f konvergiert, auch bzgl. der L^2-Norm gegen f konvergiert.

(ii) Betrachten Sie für $a = 0$ und $b = 2$ die Folge

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n, & x \in [0,1], \\ 1, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Berechnen Sie, in welcher der Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{L^2}$ die Folge (f_n) eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 8
Wie in der Vorlesung definieren wir für reelle Zahlen $p \in [1,\infty)$ die Räume $\ell^p(\mathbb{N})$ durch

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\right\}$$

und statten sie mit den Normen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p}, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

aus. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen des Banachraums $\ell^p(\mathbb{N})$ durch

$$\begin{aligned} a_1 &= (1,0,0,\dots),\\ a_2 &= (1,1/2,0,0,\dots),\\ a_3 &= (1,1/2,1/4,0,0,\dots),\\ a_4 &= (1,1/2,1/4,1/8,0,0,\dots),\\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Untersuchen Sie, für welche $p \in [1,\infty)$ die Folge $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge im Raum $\ell^p(\mathbb{N})$ ist.

Aufgabe 9
Am Ende von Kapitel 1 der Vorlesung wurde der Begriff der *schwachen Ableitung* erklärt.[1] Berechnen Sie die schwache Ableitung der Funktion[2]

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -x, & x \in (-1,0),\\ 3x, & x \in [0,1). \end{cases}$$

Aufgabe 10
Rechnen Sie nach, dass die Funktionen $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, ein Orthonormalsystem[3] im (komplexen) Hilbertraum $L^2([0,2\pi])$ bilden.

[1] Hilberträume, deren Elemente schwach differenzierbare Funktionen sind, tauchen in der Quantenmechanik als natürliche Definitionsbereiche von Hamilton-Operatoren auf.

[2] Zur Erinnerung: Eine Funktion $f \in L^2(a,b)$ heißt *schwach differenzierbar*, falls eine Funktion $g \in L^2(a,b)$ existiert, sodass die Beziehung

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ erfüllt ist. Die Funktion g heißt dann *schwache Ableitung* von f.

[3] Tatsächlich handelt es sich sogar um ein vollständiges Orthonormalsystem.