Uni Graz
TU Graz

J. Graspeuntner, C. Kern
M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

3. Übungsblatt 23. Oktober

Aufgabe 11
Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum und $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum.

(i) Zeigen Sie die folgende Version des Satzes von Pythagoras:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad x \in \mathcal{M},\ y \in \mathcal{M}^\perp.$$

(ii) Es sei für $x \in \mathcal{H}$ die orthogonale Zerlegung gegeben durch $x = y + z$ mit $y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{M}^\perp$. Zeigen Sie (unter der Verwendung von Punkt (i)), dass y die *Bestapproximierende* von x in $\mathcal{M}$ ist, d.h. dass

$$\|x-y\| = \min\{\|x-y'\| : y' \in \mathcal{M}\}$$

gilt.

(iii) Man nehme nun zusätzlich an, dass $\mathcal{M}$ endlichdimensional ist und dass $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{M}$ ist. Es sei wie in Punkt (ii) $x = y+z$ mit $y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{M}^\perp$. Zeigen Sie, dass dann

$$y = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

gilt.

Hinweis zu (iii) Machen Sie den Ansatz $y = \sum_{i=1}^n c_i e_i$. Wie sehen die Koeffizienten c_i aus?

Aufgabe 12
Berechnen Sie die ersten drei *normierten Legendrepolynome* $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$, d.h. wenden Sie das Gram–Schmidt-Verfahren im Raum $L^2(-1,1)$ auf die *Monome* $x_0(t) = 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$ an.

Aufgabe 13
Wir sagen, dass eine auf dem abgeschlossen Intervall $[-1,1]$ zweimal stetig differenzierbare Funktion[1] f eine Eigenfunktion zum *Legendre-Eigenwertproblem* ist, falls ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existsiert, sodass

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)f'](x) = \lambda f(x) \quad \text{für alle } x \in (-1,1), \tag{1}$$

löst. Zeigen Sie, dass zwei Lösungen f, g des Legendre-Eigenwertproblems (1) zu unterschiedlichen $\lambda \neq \mu$ orthogonal aufeinander stehen.
Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Eigenwerte λ, μ in (1) reell sind.

[1] d.h. f ist in $(-1,1)$ zweimal stetig differenzierbar und f, f' und f'' lassen sich stetig auf ± 1 erweitern

Aufgabe 14

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Legendre Polynome P_n (vgl. Aufgabe 12 bzw. die Vorlesung) die Legendre-Differenzialgleichung (1) mit den Eigenwerten $\lambda = n(n+1)$ lösen. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(i) Setzen Sie den Ansatz

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

in die Legendre-Differenzialgleichung für $\lambda = n(n+1)$ ein und finden Sie eine rekursive Beziehung zwischen a_k und a_{k+2}, welche die Koeffizienten erfüllen müssen. Warum sind die Polynome Q_n für die spezielle Wahl von λ tatsächlich Lösungen von (1)? (Tipp: Beachten Sie, dass bei geraden/ungeraden n die Wahl der Koeffizienten a_0 bzw. a_1 eine wichtige Rolle spielen)

(ii) Schließen Sie aus Aufgabe 13 und der Tatsache, dass die Legendre-Polynome P_n über das Gram-Schmidt-Verfahren aus den Monomen $\{1, x, \ldots, x^n\}$ konstruiert wurden, dass die P_n (bis auf Multiplikation mit einer Konstante) mit den in Punkt (i) konstruierten Lösungen Q_n übereinstimmen müssen.

Aufgabe 15

(i) Es seien $-\infty < a < b < \infty$ und es sei $\{f_n\}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(a,b)$. Weiters seien $-\infty < a' < b' < \infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$\tilde{f}_n(x) := \sqrt{\frac{b-a}{b'-a'}} f_n\left(\frac{b-a}{b'-a'}x + \frac{ab'-a'b}{b'-a'}\right), \quad x \in [a', b'],\ n \in \mathbb{N},$$

ein Orthonormalsystem in $L^2(a', b')$ bildet.

(ii) Verwenden Sie das Verfahren aus Punkt (i), um das Orthonormalsystem $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, in $L^2(0, 2\pi)$ zu einem Orthonormalsystem in $L^2(-1,1)$ zu transformieren.