Uni Graz
TU Graz

J. Graspeuntner, C. Kern
M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

6. Übungsblatt 13. November

Aufgabe 26

Es sei $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ eine Treppenfunktion, d.h. $k(x, y) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{[a_j,b_j]\times[c_j,d_j]}(x, y)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ und $[a_j, b_j] \times [c_j, d_j]$ kompakte Rechtecke in $\mathbb{R}^2$ sind.[1] Zeigen Sie, dass der lineare Operator

$$T_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (T_k f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x, y)f(y)dy,$$

endlichdimensionales Bild hat, d.h. $\dim \operatorname{ran} T < \infty$.
Hinweis: Finden Sie für die Treppenfunktionen eine Zerlegung der Art $\mathbb{1}_{[a,b]\times[c,d]}(x, y) = f(x)g(y)$.

Aufgabe 27

Es sei nun $k \in L^2(\mathbb{R}^2)$ beliebig. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass der Integraloperator $T_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, definiert durch

$$(T_k f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x, y)f(y)dy,$$

kompakt ist.

(i) Zeigen Sie, dass T_k beschränkt ist.

(ii) Es sei $(k_n)_n$ eine Folge von Treppenfunktionen (wie in Aufgabe 26) mit $\|k - k_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \to 0$, $n \to \infty$.[2] Weiters seien die Operatoren $T_{k_n} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, definiert durch

$$(T_{k_n} f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k_n(x, y)f(y)dy.$$

Zeigen Sie, dass

$$\|T_{k_n} - T_k\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

in der Operatornorm.

(iii) Berechnen Sie den adjungierten Operator T^* des laut Punkt (ii) und Aufgabe 26 kompakten Operators T.

Aufgabe 28

In dieser Aufgabe überlegen wir uns, dass nicht jeder symmetrische, unbeschränkte Operator automatisch selbstadjungiert ist. Dazu betrachten wir in $L^2(0, 1)$ den Operator

$$Tf := -f'', \quad \operatorname{dom} T = \{f \in C^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass T ein dicht definierter, symmetrischer Operator ist, d.h. dass $(Tf, g)_{L^2} = (f, Tg)_{L^2}$ für alle $f, g \in \operatorname{dom} T$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Menge $C^2([0, 1])$ in $\operatorname{dom} T^*$ enthalten ist. Wie sieht $T^* f$ für $f \in C^2([0, 1])$ aus?

---

[1] Hier ist $\mathbb{1}_{[a,b]\times[c,d]}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (x, y) \in [a, b] \times [c, d], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

[2] So eine Folge existiert immer. Das darf ohne Beweis verwendet werden.

Hinweis: Um zu zeigen, dass $\operatorname{dom} T$ dicht in $L^2(0,1)$ liegt, darf ohne Beweis verwendet werden, dass $C_0^\infty(0,1)$ dicht in $L^2(0,1)$ liegt.

Aufgabe 29
Berechnen Sie das gesamte Spektrum und die Resolventenmenge des linearen Operators

$$T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - iy \\ 2x + ix - 4y \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie alle Ergebnisse. Untersuchen Sie außerdem, ob T selbstadjungiert ist.
Hinweis: Um die Punkte in der Resolventenmenge von T zu bestimmen, darf das ganze Wissen aus der linearen Algebra verwendet werden, insbesondere, dass jede lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen Hilberträumen stetig ist.

Aufgabe 30
Gegeben seien die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} -3, & x \in [-1, 0), \\ 2 - i, & x \in [0, 1), \\ 1, & x \in [1, 4], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 4], \end{cases}$$

und der lineare Operator

$$G : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto gf.$$

Berechnen Sie das Spektrum und die Resolventenmenge von G. Welche der Spektralpunkte sind Eigenwerte? Berechnen Sie für $\lambda \in \rho(G)$ die Abbildung $(G - \lambda)^{-1}$ und begründen Sie, warum diese beschränkt ist. Ist der Operator G selbstadjungiert?