Uni Graz
TU Graz

J. Graspeuntner, C. Kern
M. Holzmann, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle DGL (für PhysikerInnen) WS 2018/19

9. Übungsblatt 4. Dezember

Auf diesem Übungsblatt wollen wir den *harmonischen Oszillator* untersuchen. Dies ist ein Standardmodell in der Quantenmechanik. In allen folgenden Beispielen sei $H : \operatorname{dom} H \to L^2(\mathbb{R})$ der lineare Operator, der durch

$$\begin{aligned} Hf(x) &:= -\frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2}x^2 f(x), \\ \operatorname{dom} H &= \left\{ p(x)e^{-x^2/2} : p \text{ ist Polynom in } x \right\}, \end{aligned}$$

gegeben ist.[1] Die folgenden Beispiele bauen aufeinander auf, insbesondere dürfen in späteren Aufgaben die Resultate der vorhergehenden verwendet werden.

Aufgabe 41

(i) Berechnen Sie die ersten zwei *Hermite-Funktionen*, d.h. wenden Sie das Gram–Schmidt-Verfahren im $L^2(\mathbb{R})$ auf die Funktionen $x_n(t) = t^n e^{-t^2/2}$, $n = 0, 1$, an.

(ii) Zeigen Sie durch rekursives Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens, dass sich die Hermite-Funktionen für allgemeines n, welche durch Fortsetzung des Gram–Schmidt-Verfahrens in Punkt (i) für beliebiges n erklärt sind, darstellen lassen als $h_n(t) = H_n(t)e^{-t^2/2}$, wobei H_n ein Polynom vom Grad n ist.

Hinweis zu (ii): Zeigen Sie unter der Voraussetzung, dass H_{n-1} ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ist, dass H_n ein Polynom n-ten Grades sein muss.

Die Hermite-Funktionen $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$, die man hier erhält, bilden ein *vollständiges Orthonormalsystem* in $L^2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 42
Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des harmonischen Oszillators:

(i) Argumentieren Sie, dass H wohldefiniert ist, d.h. $Hf \in L^2(\mathbb{R})$ für alle $f \in \operatorname{dom} H$.

(ii) Für alle $f, g \in \operatorname{dom} H$ gilt
$$(Hf, g) = (f, Hg).$$

Aus der Tatsache, dass alle Hermite-Polynome in $\operatorname{dom} H$ liegen, folgt, dass H dicht definiert ist. Damit ist H ein *symmetrischer* Operator.

Um das Spektrum des harmonischen Oszillators H zu bestimmen, benötigen wir den *Erzeugungsoperator* $A_+ : \operatorname{dom} A_+ \to L^2(\mathbb{R})$ und den *Vernichtungsoperator* $A_- : \operatorname{dom} A_- \to L^2(\mathbb{R})$, welche durch

$$A_\pm f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(xf(x) \mp f'(x) \right), \qquad \operatorname{dom} A_\pm = \operatorname{dom} H,$$

gegeben sind.

Aufgabe 43
Zeigen Sie, dass der Erzeugungs- und Vernichtungsoperator die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(i) $[A_- A_+ - A_+ A_-] f(x) = f(x)$ für alle $f \in \operatorname{dom} H$;

[1] d.h. Funktionen im Definitionsbereich von H haben die Form $f(x) = (c_1 x^{n_1} + \cdots + c_k x^{n_k})\, e^{-x^2/2}$, wobei $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und die Summe in der Klammer immer endlich ist.

(ii) Wir definieren das Produkt $N := A_+A_-$. Folgern Sie aus (i), dass $[NA_\pm - A_\pm N]f(x) = \pm A_\pm f(x)$ für alle $f \in \operatorname{dom} H$ gilt. Insbesondere, falls f die Gleichung $Nf = \lambda f$ erfüllt, so folgt $NA_+f = (\lambda+1)A_+f$.

Aufgabe 44
Nutzen Sie die Aussagen von Aufgabe 38, um folgende Punkte zu zeigen:

(i) Ist $f = p(x)e^{-x^2/2}$, wobei p ein Polynom n-ten Grades ist, so ist $A_+f(x) = q(x)e^{-x^2/2}$, wobei q ein Polynom $(n+1)$-ten Grades ist. Ist insbesondere $f \neq 0$, so ist auch $A_+f \neq 0$.

(ii) Die Funktion $f_0(x) := e^{-x^2/2}$ erfüllt $A_-f_0 = 0$.

(iii) Die Funktionen $f_n := A_+^n f_0$ sind Eigenfunktionen von N zum Eigenwert n.

Nun sind wir vorbereitet, um alle Eigenwerte des harmonsichen Oszillators vollständig zu beschreiben.

Aufgabe 45
Zeigen Sie, dass $\sigma_p(H) = \left\{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ist. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(i) $Hf(x) = \left(N + \frac{1}{2}\right)f(x)$ für alle $f \in \operatorname{dom} H$.

(ii) Die Funktionen f_n aus (i) sind Eigenfunktionen von H zum Eigenwert $n + \frac{1}{2}$.

(iii) Sind $f_1, f_2 \in \operatorname{dom} H$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass $Hf_1 = \lambda_1 f_1$ und $Hf_2 = \lambda_2 f_2$, so stehen f_1 und f_2 orthogonal aufeinander.

(iv) Zeigen Sie durch iteratives Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens, dass die f_n bis auf die Multiplikation mit Konstanten mit den Hermite-Funktionen übereinstimmen.

Hinweis zu (iii): Verwenden Sie die Aussage aus Aufgabe 42.
Hinweis zu (iv): Aufgabe 41 (ii) und Aufgabe 44 (i) können hilfreich sein.

Ist nun $A : \operatorname{dom} A \to L^2(\mathbb{R})$ eine selbstadjungierte Realisierung des harmonischen Oszillators H, d.h. A ist ein selbstadjungierter Operator mit $\operatorname{dom} H \subset \operatorname{dom} A$ und $Af = Hf$ für alle $f \in \operatorname{dom} H$. Dann folgt aus den obigen Überlegungen, dass $\sigma_p(A) = \left\{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$, da es ein zugehöriges vollständiges System von Eigenvektoren gibt und es daher nicht noch mehr Eigenfunktionen und damit Eigenwerte geben kann. Weiters kann man mit dem Spektralsatz zeigen, dass auch $\sigma(A) = \left\{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$, d.h. es wird wirklich das gesamte Spektrum von A beschrieben!