

Numerische Mathematik 1

1. Für die Vandermonde–Matrix

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

zeige man

$$\det V_n = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

2. Man beweise die Taylorsche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s) ds.$$

3. Für einen Parameter $h > 0$ seien die Stützstellen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h$$

gegeben. Man bestimme das lineare Interpolationspolynom f_1 der Funktion

$$f(x) = x^2$$

und berechne die Fehler

$$\max_{x \in [0, h]} |f(x) - f_1(x)|, \quad \int_0^h [f(x) - f_1(x)]^2 dx, \quad \int_0^h [f'(x) - f_1'(x)]^2 dx.$$