Numerische Mathematik 1

28. Für $n \in \mathbb{N}$ und $h = 1/n$ sei

$$A_n = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Man zeige, daß die Eigenvektoren $\underline{x}^k$, $k = 1, \ldots, n-1$, gegeben sind durch

$$x_i^k = \sin k \frac{i\pi}{n} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1$$

und man bestimme den zugehörigen Eigenwert. Wie verhält sich die spektrale Konditionszahl $\kappa_2(A_n)$ für $n \to \infty$?

29. Sei A eine symmetrische und positiv definite Matrix. Man zeige, daß das SOR–Verfahren

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \omega(D + \omega L)^{-1}[A\underline{x}^k - \underline{f}]$$

genau dann konvergiert, wenn $0 < \omega < 2$ erfüllt ist. Dabei ist $D = \mathrm{diag} A$ die Diagonalmatrix von A und L die untere Dreiecksmatrix von A.

30. Eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erfülle die Ungleichungen

$$(A\underline{x}, \underline{x}) \geq c_1^A \|\underline{x}\|_2^2, \quad \|A\underline{x}\|_2 \leq c_2^A \|\underline{x}\|_2 \quad \text{für alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert das Richardson–Verfahren

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \alpha[A\underline{x}^k - \underline{f}] \; ?$$