Numerische Mathematik 1

28. Für die Stützstellen $x_k = kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$ mit der Schrittweite $h = 1/n$ sei die Basis $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ der stückweise linearen stetigen Basisfunktionen $\varphi_k(x)$ gegeben. Für diese sei die Massematrix M_h durch die Einträge

$$M_h[\ell, k] = \int_0^1 \varphi_k(x)\, \varphi_\ell(x)\, dx \quad \text{für } k, \ell = 1, \ldots, n$$

gegeben. Man finde positive Konstanten c_1 und c_2 derart, so daß die Spektraläquivalenzungleichungen

$$c_1\, (\underline{u}, \underline{u}) \leq (M_h \underline{u}, \underline{u}) \leq c_2\, (\underline{u}, \underline{u}) \quad \text{für alle } \underline{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

erfüllt sind.

Hinweis: Man drücke die Bilinearform $(M_h \underline{u}, \underline{u})$ als Integral aus und betrachte die lokalen Beiträge in Matrixform der Dimension 2.

29. Für die Stützstellen $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$ mit den lokalen Maschenweiten $h_k = x_k - x_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, n$ sei die Basis $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ der stückweise linearen stetigen Basisfunktionen $\varphi_k(x)$ gegeben. Für diese sei die Massematrix M_h durch die Einträge

$$M_h[\ell, k] = \int_0^1 \varphi_k(x)\, \varphi_\ell(x)\, dx \quad \text{für } k, \ell = 1, \ldots, n$$

gegeben. Weiters sei D_h eine Diagonalmatrix mit den Einträgen

$$D_h[0,0] = h_1, \quad D_h[n,n] = h_n, \quad D_h[k,k] = h_k + h_{k+1} \quad \text{für } k = 1, \ldots, n-1.$$

Man finde positive Konstanten c_1 und c_2 derart, so daß die Spektraläquivalenzungleichungen

$$c_1\, (D_h \underline{u}, \underline{u}) \leq (M_h \underline{u}, \underline{u}) \leq c_2\, (D_h \underline{u}, \underline{u}) \quad \text{für alle } \underline{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

erfüllt sind.

30. Für $n \in \mathbb{N}$ und $h = 1/n$ sei

$$A_n = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Man zeige, daß die Eigenvektoren $\underline{x}^k$, $k = 1, \ldots, n-1$, gegeben sind durch

$$x_i^k = \sin k \frac{i\pi}{n} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1$$

und man bestimme den zugehörigen Eigenwert. Wie verhält sich die spektrale Konditionszahl $\kappa_2(A_n)$ für $n \to \infty$?