Numerische Mathematik 1

31. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ betrachte man das Gradientenverfahren des steilsten Abstiegs,

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \alpha_k \underline{r}^k, \quad \underline{r}^k = A\underline{x}^k - \underline{f}, \quad \alpha_k = \frac{(\underline{r}^k, \underline{r}^k)}{(A\underline{r}^k, \underline{r}^k)} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \underline{x}^0 = \underline{0}.$$

Man bestimme die Näherungslösungen $\underline{x}^1$, $\underline{x}^2$ und $\underline{x}^3$ und berechne die normierten Vektoren

$$\frac{\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k}{\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k\|} \quad \text{für } k = 0, 1, 2.$$

32. Für die Stützstellen $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$ mit den lokalen Maschenweiten $h_k = x_k - x_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, n$ sei die Basis $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ der stückweise linearen stetigen Basisfunktionen $\varphi_k(x)$ gegeben. Für diese sei die Massematrix M_h durch die Einträge

$$M_h[\ell, k] = \int_0^1 \varphi_k(x)\, \varphi_\ell(x)\, dx \quad \text{für } k, \ell = 1, \ldots, n$$

gegeben. Weiters sei D_h eine Diagonalmatrix mit den Einträgen

$$D_h[0,0] = h_1, \quad D_h[n,n] = h_n, \quad D_h[k,k] = h_k + h_{k+1} \quad \text{für } k = 1, \ldots, n-1.$$

Man finde positive Konstanten c_1 und c_2 derart, so daß die Spektraläqzuvalenzungleichungen

$$c_1\,(D_h\underline{u}, \underline{u}) \leq (M_h\underline{u}, \underline{u}) \leq c_2\,(D_h\underline{u}, \underline{u}) \quad \text{für alle } \underline{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

erfüllt sind.
Hinweis: Man drücke die Bilinearform $(M_h\underline{u}, \underline{u})$ als Integral aus und betrachte die lokalen Beiträge in Matrixform der Dimension 2.

33. Für eine symmetrische und positiv definite Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & D \end{pmatrix}$$

mit Block–Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $D \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ und $B \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ bestimme man eine Zerlegung der folgenden Form

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Wie kann daraus eine Vorkonditionierung für M gefunden werden?