

Numerische Mathematik 1

34. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ betrachte man das Gradientenverfahren des steilsten Abstiegs,

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \alpha_k \underline{r}^k, \quad \underline{r}^k = A \underline{x}^k - \underline{f}, \quad \alpha_k = \frac{(\underline{r}^k, \underline{r}^k)}{(A \underline{r}^k, \underline{r}^k)} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, \quad \underline{x}^0 = \underline{0}.$$

Man bestimme die Näherungslösungen $\underline{x}^1$, $\underline{x}^2$ und $\underline{x}^3$ und berechne die normierten Vektoren

$$\frac{\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k}{\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k\|} \quad \text{für } k = 0, 1, 2.$$

35. Sei A symmetrisch und positiv definit und es gelte

$$(A \underline{x}, \underline{x}) \geq c_1^A \|\underline{x}\|_2^2, \quad \|A \underline{x}\|_2 \leq c_2^A \|\underline{x}\|_2$$

für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Für das in Aufgabe **34.** angegebene Gradientenverfahren des steilsten Abstiegs zeige man die Fehlerabschätzung

$$\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}\|_A^2 \leq \left[1 - \left(\frac{c_1^A}{c_2^A} \right)^2 \right]^{k+1} \|\underline{x}^0 - \underline{x}\|_A^2.$$

36. Für eine symmetrische und positiv definite Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & D \end{pmatrix}$$

mit Block-Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $D \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ und $B \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ bestimme man eine Zerlegung der folgenden Form

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Wie kann daraus eine Vorkonditionierung für M gefunden werden?