Numerische Mathematik 1

Für $1 < a \in \mathbb{R}$ sei die folgende Rekursionsvorschrift gegeben:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\Big(x_k + \frac{a}{x_k}\Big) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_0 = a. \tag{1}$$

37. Man beweise die Konvergenz der durch (1) definierten Folge durch Nachweis von Monotonie und Beschränktheit, jeweils durch vollständige Induktion.

38. Man zeige, daß die Abbildung

$$\Phi(x) := \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big)$$

in $[\sqrt{a}, a]$ eine Selbstabbildung und eine Kontraktion ist, d.h. für $x \in [\sqrt{a}, a]$ ist $\Phi(x) \in [\sqrt{a}, a]$ und es gilt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq q\,|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [\sqrt{a}, a], \quad q < 1.$$

Durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes gebe man eine a priori Fehlerabschätzung der Näherungslösung x_k an. Wie lautet die zugehörige Fixpunktgleichung?

39. Für $a = 4$ berechne man die Näherungslösungen x_k und die zugehörigen Fehler $e_k = |x_k - 2|$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Welche Konvergenzordnung beobachtet man?