Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2023/2024
Blatt 2
18.10.2023

Numerische Mathematik 1

4. Betrachtet werden die rekursiv durch

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots$$

definierten Tschebyscheff–Polynome. Für $x \in [-1, 1]$ beweise man die alternative Darstellung

$$T_k(x) \,=\, \cos\left(k \arccos x\right).$$

5. Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ beweise man für die rekursiv definierten Teschebyscheff–Polynome die Darstellung

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^k + \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{-k}\right].$$

6. Man beweise die Orthogonalität der Tschebyscheff–Polynome,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_k(x)T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ \frac{1}{2}\pi & \text{für } k = \ell \neq 0, \\ \pi & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases}$$