

Numerische Mathematik 1

16. Für das Referenz–Dreieck

$$\tau = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$$

ist eine numerische Integrationsformel

$$\int_{\tau} f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^3 \omega_k f(x_k, y_k) + R_3$$

herzuleiten, die Polynome

$$p_2(x, y) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2} a_{\alpha} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$$

exakt integriert.

Hinweis: Man nutze Symmetrien in der Lage der Stützstellen und bei der Bestimmung der Integrationsgewichte aus!

17. Für $n = 2m$ und $k = 0, \dots, n$ zeige man

$$\sum_{i=1}^n \cos \frac{(2k+1)i\pi}{n+1} = 0.$$

18. Man bestimme Polynome $\{p_k(x)\}_{k=0}^3$ mit

$$\int_0^1 p_k(x) p_{\ell}(x) \ln x dx = 0 \quad \text{für } k \neq \ell.$$