

Numerische Mathematik 1

22. Gegeben sei die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{für } x \in (1, 2). \end{cases}$$

Mit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ seien weiters drei Stützstellen gegeben. Man bestimme die stückweise lineare und stetige L_2 -Projektion von $u(x)$ und skizziere diese.

23. Gegeben sei das Integral

$$I = \int_0^1 \cos x \ln x \, dx.$$

Gesucht ist die optimale Stützstelle x_0 der numerischen Integrationsformel

$$I_1 = \cos x_0 \omega_0.$$

Welchen Wert erhält man für I_1 ?

24. Für Vektoren $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ seien die Normen

$$\|\underline{u}\|_1 := \sum_{i=1}^n |u_i|, \quad \|\underline{u}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|\underline{u}\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |u_i|$$

erklärt. Man beweise die Äquivalenzungleichungen

$$\begin{aligned} \|\underline{u}\|_\infty &\leq \|\underline{u}\|_1 \leq n \|\underline{u}\|_\infty, \\ \|\underline{u}\|_\infty &\leq \|\underline{u}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\underline{u}\|_\infty, \\ \|\underline{u}\|_2 &\leq \|\underline{u}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\underline{u}\|_2, \end{aligned}$$

für alle $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ und zeige, daß diese scharf sind, d.h. es existieren Vektoren, so daß jeweils Gleichheit gilt.