

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$\partial_t u(t) = f(t) \quad \text{für } t \in (0, T), \quad u(0) = 0.$$

Sei  $L^2(0, T)$  der Raum der in  $(0, T)$  quadratintegrierbaren Funktionen mit der Norm

$$\|u\|_{L^2(0, T)} := \left( \int_0^T [u(t)]^2 dt \right)^{1/2}.$$

Ferner sei  $H_0^1(0, T)$  der Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen, deren erste Ableitung ebenfalls quadrat-integrierbar ist, und die im Nullpunkt verschwinden. Eine Norm sei

$$\|u\|_{H_0^1(0, T)} := \left( \int_0^T [u(t)]^2 dt + \int_0^T [\partial_t u(t)]^2 dt \right)^{1/2}.$$

**40.** Man stelle eine Variationsformulierung zur Bestimmung von  $u \in H_0^1(0, T)$  auf.

**41.** Man zeige, daß  $\|\partial_t u\|_{L^2(0, T)}$  eine äquivalente Norm in  $H_0^1(0, T)$  definiert.

**42.** Für gegebenes  $v \in L^2(0, T)$  bestimme man ein  $u_v \in H_0^1(0, T)$  so dass gilt:

$$\int_0^T \partial_t u_v(t) v(t) dt \neq 0.$$