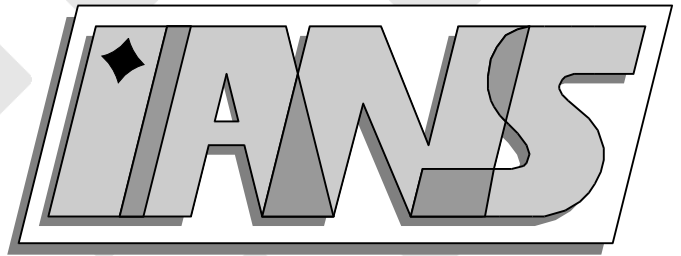


**Universität
Stuttgart**



Partielle Differentialgleichungen

Wolfgang L. Wendland

**Berichte aus dem Institut für
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Vorlesungsskript 2004/012

Universität Stuttgart

Partielle Differentialgleichungen

Wolfgang L. Wendland

**Berichte aus dem Institut für
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Vorlesungsskript 2004/012

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS)
Fakultät Mathematik und Physik
Fachbereich Mathematik
Pfaffenwaldring 57
D-70 569 Stuttgart

E-Mail: ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de

WWW: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

ISSN 1611-4176

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.
IANS-Logo: Andreas Klimke. \LaTeX -Style: Winfried Geis, Thomas Merkle.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	5
Einleitende Bemerkungen	1
1 Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung	3
1.1 Erhaltungssätze	3
1.2 Die Ausbreitung von Wellen	10
1.3 Das Charakteristikenverfahren	12
1.4 Lineare DGL 1. Ordnung in \mathbb{R}^n	21
1.5 Charakteristikenverfahren	27
1.6 Allgemeine Gleichung 1.Ordnung im \mathbb{R}^n	36
1.7 Singuläre Lösung und vollständiges Integral	44
1.7.1 Singuläres Gebilde und singuläre Lösung	44
1.7.2 Vollständiges Integral	45
1.8 Bemerkungen zur Transport- und Eikonalgleichung	47
1.8.1 Eikonalgleichung und Wellenoptik	47
1.8.2 Boltzmannsche Transportgleichung	49
1.9 Unstetige Lösungen und Stöße	50
1.10 Entropiebedingungen	65
1.11 Lösungskonstruktion nach Dafermos	81
1.12 Die diskretisierte Konstruktionsmethode nach M. Kunik	95
1.13 Frontverfolgungsmethode (nach [64])	98
2 Vollständig integrable überbestimmte Systeme erster Ordnung	107
2.1 Zwei Gleichungen erster Ordnung	107
2.2 Die Methode von Lagrange und Charpit	113
2.3 Vollständig integrable Systeme im \mathbb{R}^n	114
3 Systeme erster Ordnung im \mathbb{R}^2 mit n Gleichungen für n gesuchte Funktionen und die Typeneinteilung	116
3.1 Klassifizierung und Typen	116
3.2 Die Normalform hyperbolischer Systeme	118
3.3 Die Normalform elliptischer Systeme	120
4 Charakteristikenverfahren für hyperbolische Systeme im \mathbb{R}^2	121
4.1 Fastlineare hyperbolische Systeme im \mathbb{R}^2 [58, 61, 96]	121
4.2 Quasilineare hyperbolische Systeme im \mathbb{R}^2 (nach [38])	124
4.3 Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension und Riemann-Invarianten	129

5	Der Existenzsatz von Cauchy–Kowalewskaya	133
5.1	Der Cauchysche Algorithmus	133
5.2	Der Konvergenzbeweis von Frau Kowalewskaya	136
5.3	Zur Tragweite des Satzes von Cauchy–Kowalewskaya	140
5.3.1	Das Cauchy–Problem für die Laplace–Gleichung	140
5.3.2	Das O. Perronsche Beispiel [61] 3.2	141
5.3.3	Das Beispiel von Hans Lewy (nach [116] I, §B)	141
6	Elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung, das Maximumprinzip [58,	
	61]	143
6.1	Hopfsche Lemmata	143
6.2	Finite Differenzen	148
7	Übungsaufgaben mit Lösungsvorschlägen	153
	Literaturverzeichnis	232

Einleitende Bemerkungen

Diese Vorlesung zur Einführung in die partiellen Differentialgleichungen geht auf Wolfgang Haacks und Günter Hellwigs [61] Vorlesungen zu diesem Thema an der TU Berlin zurück und wurde von mir insgesamt zehn mal an der TH Darmstadt und an der Universität Stuttgart, meist als wöchentlich vierstündige Vorlesung mit zweistündigen Übungen gehalten. Während dieser drei Jahrzehnte haben sich die Schwerpunkte stark verschoben; so nehmen im vorliegenden Skript die nichtlinearen Erhaltungsgleichungen erster Ordnung in einer räumlichen Dimension einen breiten Raum ein, da für diese Gleichungen erster Ordnung mit elementaren Methoden bereits tiefe Einblicke in das aktuelle Gebiet der nichtlinearen partielle Differentialgleichungen gewonnen werden können.

Ursprünglich sollte aus der Vorlesung ein Lehrbuch entstehen, deshalb sind im Literaturverzeichnis sehr viel mehr Referenzen gesammelt als im Skript selbst zitiert werden. Viele andere Verpflichtungen haben dazu geführt, dass ein einführendes und trotzdem aktuelles Lehrbuch bislang nicht fertig wurde, aber die tatkräftige Unterstützung durch Gisela Wendland bei der Herstellung, Überarbeitung und Fertigstellung des \LaTeX -Manuskripts und durch cand.math. Jan Jung, der die Bilder hergestellt hat, hat nun wenigstens dieses Skript entstehen lassen.

In den beiden letzten dieser Vorlesungen 1999 und 2003 haben Dr. C. Coclici und Dr. R. Bürger die Übungen betreut, und ihnen beiden danke ich sehr herzlich für die ausgearbeiteten Musterlösungen, die zusammen mit den Übungsaufgaben den letzten Teil des Skripts bilden und von Jan Jung als \LaTeX -files geschrieben wurden.

Eine Übersicht über partielle Differentialgleichungen kann man angesichts der vielseitigen Anwendungen und der stürmischen Theorie-Entwicklung während der letzten beiden Jahrhunderte nicht mehr geben. Mathematische Modelle sind heutzutage in allen Wissenschaften grundlegend. Lokale Gesetze führen bei mehreren Freiheitsgraden zwangsläufig zu partiellen Differentialgleichungen, und fast jedes Gesetz ist lokaler Natur. Wir begegnen heute immer neuen Fragestellungen, die sich aus den jeweiligen Anwendungen ergeben, und die Kenntnisse über Theorie, Lösungsmethoden, numerische Verfahren und auf partielle Differentialgleichungen basierenden Simulationsalgorithmen nehmen exponentiell zu. Fortschritt und Verzettelung wohnen dann eng beieinander. Wir können einerseits unerhörte Entdeckungen und Resultate bewundern, zum andern geraten klassische Resultate mitunter in Vergessenheit und werden dann bei numerischen Experimenten wieder entdeckt. Verlässliche Simulationen sind aber nur auf der Basis rigoroser mathematischer Analysis möglich, und dies erfordert die Beschäftigung mit mathematischer Theorie ebenso wie mit den Lösungsalgorithmen. Heutige komplexe Aufgaben können darüber hinaus nur in engem interdisziplinären Zusammenhang gelöst werden; unseriöses Dilettantentum endet immer im Desaster, wie an immer neuen Beispielen sichtbar ist. Die partiellen Differentialgleichungen treten besonders häufig bei Modellierungen realer Probleme auf.

Eine einzelne partielle Differentialgleichung ist eine geforderte Relation

$$F(x,t; u(x,t), D_{(x,t)}u(x,t), \dots, D_{(x,t)}^\beta u(x,t)) = 0$$

zwischen einer gesuchten Funktion $u(x,t)$ und ihren Ableitungen im gleichen "Weltpunkt" (x,t) , wobei x häufig den Ort und t die Zeit bezeichnen.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall; einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

1 Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

Die meisten partielle Differentialgleichungen in den Anwendungen entsprechen lokalen Versionen von Bilanzierungen bzw. Erhaltungsgleichungen.

1.1 Erhaltungssätze

Ein Körper $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1; 2; 3$) besteht aus materiellen Punkten oder Partikeln, die das Volumen $\Omega(t)$ zur Zeit t besetzen; $\Omega(t)$ wird auch **Konfiguration** genannt. Beziehen wir den Zustand zur Zeit t auf denjenigen zur Zeit t_0 , so heißt $\Omega(t_0)$ die **Referenzkonfiguration**. Die Bewegung eines Körpers $\Omega(t)$ sei beschrieben durch

$$\vec{G}(t, t_0, \vec{x}) : \Omega(z_0) \rightarrow \Omega(t) \subset \mathbb{R}^n \quad (1.1.1)$$

für $\vec{x} \in \Omega(t_0)$ und $t \geq t_0$ in einem geeigneten Zeitintervall, \vec{G} sei bei festgehaltener Zeit t stetiger Homöomorphismus und mindestens bi-Lipschitz bezüglich t ; der Bequemlichkeit halber sogar diffeomorph bezüglich \vec{x} und differenzierbar nach t . Durch

$$\vec{y}(t) = \vec{G}(t, t_0, \vec{x}) \quad (1.1.2)$$

werden dann die **Trajektorien** der "Partikel" beschrieben, die sich zur Zeit $t = t_0$ in $\vec{x} \in \Omega(t_0)$ befunden haben; (1.1.2) beschreibt den Partikelfluss; $y(t)$ nennt man die materiellen Punkte. Das vom "Körper" zur Zeit t eingenommene Volumen

$$\Omega(t) := \{\vec{y}(t) = \vec{G}(t, t_0, \vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in \Omega(t_0)\} \quad (1.1.3)$$

heißt auch **Lagrange'sches Kontrollvolumen**. (Der Einfachheit halber setzen wir in Zukunft $t_0 = 0$.)

Die Transformation \vec{G} hat die **Gruppeneigenschaften**

$$\vec{G}(t_0, t_0, \vec{x}) = \vec{y}(0) = \vec{x}, \quad (1.1.4)$$

$$\vec{G}(t, \sigma, \vec{G}(\sigma, t_0, \vec{x})) = \vec{G}(t, t_0, \vec{x}) \text{ für } t_0 \leq \sigma \leq t. \quad (1.1.5)$$

Die Trajektorien erfüllen das System gewöhnlicher Anfangswertprobleme

$$\frac{d\vec{y}}{dt} =: \vec{v} = \frac{\partial G}{\partial t}(t, t_0, \vec{x}), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{x}. \quad (1.1.6)$$

Eine physikalische Eigenschaft der "Partikel" kann als Feld $F(t, \vec{y})$ bezüglich der materiellen Punkte gegeben werden (Eulersche Beschreibung; \vec{y} **Eulersche Koordinaten** des materiellen Punktes) oder als Feld $\Phi(\vec{x}, t) = F(\vec{y}(t), t) = F(\vec{G}(t, t_0, \vec{x}), t)$ (Lagrangesche Beschreibung; \vec{x} **Lagrangesche Koordinaten** des materiellen Punktes $\vec{G}(t, t_0, \vec{x})$).

Oft ist das **Geschwindigkeitsfeld** \vec{v} als Partikeleigenschaft als $\vec{v}(t, \vec{y})$ gegeben, dann gilt

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{v}(t, \vec{y}(t)) \quad \text{und} \quad \vec{y}(t_0) = \vec{x}. \quad (1.1.7)$$

Dann ist (1.1.2) die Lösung zu (1.1.7) und hat für Lipschitz–stetiges Feld \vec{v} die Eigenschaften (1.1.4)–(1.1.7). Umgekehrt, es gilt auch

$$\vec{v}(t, \vec{y}(t)) = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t}(t, t_0, \vec{G}^{(-1)}(t, t_0, \vec{y}(t))). \quad (1.1.8)$$

Sei $F(t, \vec{y})$ eine Partikeleigenschaft, z.B. Dichte ρ , und $\Psi(t, \vec{y})$ sei die Quelledichte dieser Größe pro Zeiteinheit. Dann besagt die Bilanzgleichung für diese Größe, dass die zeitliche Ableitung der dem Körper, d.h. dem gesamten Lagrangeschen Kontrollvolumen zugeordneten Partikeleigenschaft gleich dem Zuwachs durch die Quellen in diesem Volumen sein muß. Dies ergibt die **Bilanzgleichung**:

$$\frac{d}{dt} I(t) := \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} F(t, \vec{y}) [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] = \int_{\Omega(t)} \Psi(t, \vec{y}) [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] \quad (1.1.9)$$

Für $\Psi = 0$ heißt (1.1.9) auch **Erhaltungsgleichung**.

Die Bilanzgleichung (1.1.9) ist so noch nicht für eine lokale Aussage geeignet, da sich die Ableitung nach t auch auf das Integrationsgebiet bezieht und die Leibnizsche Regel verwendet werden muß. — Dies entspricht in höheren Dimensionen dem **Reynoldsschen Transporttheorem** (siehe auch [7]).

1.1.1 Satz: Seien $\vec{v}, F \in C^1([0, T] \times \mathcal{G})$ gegeben; $\Omega(t)$ ein stückweise glatt berandetes Lagrangesches Kontrollvolumen zum Gaußschen Normalgebiet $\Omega(0)$ mit $\delta_0 > 0$ so, dass $\vec{G}(t, 0, \vec{x})$ für jedes $t \in [0, \delta_0]$ einen Diffeomorphismus von $\Omega(0)$ auf $\Omega(t)$ definiert. Dann gelten

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} F(t, \vec{y}) [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] \\ &= \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}_{\vec{y}}(F(t, \vec{y}) \vec{v}(t, \vec{y})) \right\} [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t} [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] + \int_{\vec{y} \in \partial \Omega(t)} F(t, \vec{y}) \vec{v} \cdot \vec{n}(\vec{y}) d\sigma. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Beweis: Für $t \in [0, \delta_0]$ gilt für den Deformationsgradienten

$$\det \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{x}}(t, 0, \vec{x}) = \det \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{x}}(0, 0, \vec{x}) + O(t) = 1 + O(t).$$

Also ist nach dem Satz über implizite Funktionen für jedes $t \in [0, \delta_0]$ die Abbildung $\vec{G}(t, 0, \vec{x})$ ein Diffeomorphismus. Des weiteren gilt

$$\frac{\partial g_j}{\partial t} = \frac{dy_j}{dt} = v_j.$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t} d_{(x)} g_j = d_{(x)} v_j = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial y_\ell} d_{(x)} y_\ell = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial y_\ell} d_{(x)} g_\ell.$$

Mit Hilfe des Transformationssatzes können wir das Volumenintegral umschreiben:

$$I(t) := \int_{\Omega(t)} F(t, \vec{y}) [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] = \int_{\Omega(0)} F(t, \vec{G}(t, 0, \vec{x})) [d_{(x)} g_1 \wedge \cdots \wedge d_{(x)} g_n].$$

Wegen des nun bezüglich t **festen** Volumens $\Omega(0)$ können wir das parameterabhängige Integral differenzieren und erhalten mit Ketten- und Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial t} (F \circ \vec{G}) \right) [d_{(x)} g_1 \wedge \cdots \wedge d_{(x)} g_n] + \int_{\Omega(0)} F \frac{\partial}{\partial t} [d_{(x)} g_1 \wedge \cdots \wedge d_{(x)} g_n] \\ &= \int_{\Omega(0)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial t} (t, \vec{y}) \right) \Big|_{\vec{y}=\vec{G}(t, 0, \vec{x})} + (\nabla_{(y)} F(t, \vec{y}))^\top \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \right\} [d_{(x)} g_1 \wedge \cdots \wedge d_{(x)} g_n] \\ &\quad + \int_{\Omega(0)} F(t, \vec{G}(t, 0, \vec{x})) \sum_{k=1}^n [d_{(x)} g_1 \wedge \cdots \wedge d_{(x)} \frac{\partial}{\partial t} g_k \wedge \cdots \wedge d_{(x)} g_n] \\ &= \int_{\Omega(0)} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} (t, \vec{y}) + (\nabla_{(y)} F(t, \vec{y}))^\top \vec{v} \right\} [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] \\ &\quad + \int_{\Omega(0)} F \circ G \sum_{\ell, k=1}^n [d_{(x)} g_1 \wedge \cdots \wedge \frac{\partial v_k}{\partial y_\ell} d_{(x)} g_\ell \wedge \cdots \wedge d_{(x)} g_n] \\ &= \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{(\vec{y})} F(t, \vec{y}) + F(t, \vec{y}) (\nabla_{(y)} \cdot \vec{v}) \right\} [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n]. \end{aligned}$$

Dies ist die erste Behauptung. Die zweite folgt mit dem Gaußschen Satz:

$$\int_{\Omega(t)} \nabla_{(y)} \cdot (F \vec{v}) [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] = \int_{\partial \Omega(t)} F \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma.$$

□

1.1.2 Folgerungen aus dem Reynoldsschen Transporttheorem: Die Bilanzgleichung (1.1.9) für beliebige Ω ist äquivalent zur **konservativen Formulierung**

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} (t, \vec{x}) + \operatorname{div}_{(x)} (F(t, \vec{x}) \vec{v}(t, \vec{x})) - \Psi(t, x) \right\} dV_n = 0 \quad (1.1.11)$$

oder auch

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{x}) - \Psi(t, \vec{x}) \right\} dV_n + \int_{\partial\Omega} F(t, \vec{x}) \vec{v}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (1.1.12)$$

für jedes Kontrollvolumen Ω .

Die Formulierung (1.1.11) gilt auch für unstetige Felder.

Sind Ψ und die Ableitungen von F und \vec{v} stetig, so folgt aus der Bilanzgleichung die Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, \vec{x}) + \operatorname{div}_{(x)}(F\vec{v}) = \Psi(t, \vec{x}). \quad (1.1.13)$$

Anwendungen in der Strömungsmechanik:

1.1.3 Massenerhaltung:

$F(t, \vec{x}) = \varrho$ sei die Massendichte und $\Psi = 0$ (Quellenfreiheit): Dann lautet die Massenerhaltung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varrho [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] = 0 \quad (1.1.14)$$

also in konservativer Form:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_{(x)} \cdot (\varrho \vec{v}) \right\} dV_n = 0 \quad \text{bzw.} \quad (1.1.15)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV_n + \int_{\partial\Omega} \varrho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (1.1.16)$$

und als differentielle Massenerhaltung nach(1.1.13) in Form der **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}_{(x)}(\varrho \vec{v}) = 0 \quad (1.1.17)$$

unter Voraussetzung der Stetigkeit der abgeleiteten Funktionen in (1.1.17).

1.1.4 Impulssatz: \vec{K} seien die Massenkräfte, und p sei der Druck. Dann ist ϱK_j die Impulsquellendichte, die durch K_j erzeugt wird. Somit lautet die **Impulsbilanz**:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varrho v_j [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] = \int_{\Omega(t)} \varrho K_j [dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n] - \int_{\partial\Omega(t)} p n_j d\sigma. \quad (1.1.18)$$

Die **Impulsgleichung in konservativer Form** hat dann die Gestalt

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\varrho v_j) - \varrho K_j + \operatorname{div}_{(x)}(\varrho v_j \vec{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\} dV_n = 0 \quad (1.1.19)$$

bzw.

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\varrho v_j) - \varrho K_j \right) + \int_{\partial\Omega} (\varrho v_j \vec{v} \cdot \vec{n} + p n_j) d\sigma = 0 \quad (1.1.20)$$

für jede Kontrollkonfiguration Ω und $j = 1, \dots, n$.

In differentieller Form lautet die **Impulsgleichung** in Komponenten:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varrho v_j) + \operatorname{div}_{(x)} (\varrho v_j \vec{v}) = \varrho K_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \quad (1.1.21)$$

Diese Gleichungen heißen auch **Eulersche Gleichungen**.

Sind sowohl Massenerhaltung (1.1.17) als auch Impulserhaltung (1.1.21) in differentieller Form erfüllt, kann man die Impulsgleichungen vereinfachen zu:

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + (\operatorname{grad} v_j) \cdot \vec{v} = K_j - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1.22)$$

Für $n = 1$ ist dies die **Burgers–Gleichung**:

$$v_t + v \cdot v_x = K - \frac{1}{\varrho} p_x. \quad (1.1.23)$$

1.1.5 Energiebilanz: Die kinetische Energiedichte pro Volumeneinheit ist gegeben durch $\frac{1}{2} \varrho \vec{v}^2$ und die innere Energiedichte als $e \varrho$, wobei e in der Strömungsmechanik eine bekannte Funktion der Temperatur Θ ist. Am Rand $\partial\Omega$ wird gegen den Druck p pro Flächeneinheit und pro Zeiteinheit die Arbeit $p \vec{v} \cdot \vec{n}$ und in Ω pro Volumeneinheit durch das Kraftfeld \vec{K} die Arbeit $\varrho \vec{K} \cdot \vec{v}$ pro Zeiteinheit geleistet. Mit der Wärmeleitzahl λ ergibt sich pro Flächeneinheit von $\partial\Omega$ der Wärmefluss $\lambda \varrho \nabla \Theta \cdot \vec{n}$. Damit lautet die Energiebilanz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varrho \left\{ e + \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right\} [dy_1 \wedge \dots \wedge y_n] \\ = - \int_{\partial\Omega} p \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\Omega(t)} \varrho \vec{K} \cdot \vec{v} dV_n(\vec{y}) + \int_{\partial\Omega} \lambda \varrho \vec{n} \cdot \nabla_y \Theta d\sigma. \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

Daraus folgt die **Energiegleichung in konservativer Form**:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\varrho e + \frac{1}{2} \varrho \vec{v}^2) + \operatorname{div}_{(x)} ((\varrho e + \frac{1}{2} \varrho \vec{v}^2) \vec{v}) \right. \\ \left. + \operatorname{div}_{(x)} (p \vec{v} - \lambda \varrho \operatorname{grad}_{(x)} \Theta) - \varrho \vec{K} \cdot \vec{v} \right\} dV_n = 0 \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

oder nach Anwendung des Gaußschen Satzes:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\varrho e + \frac{1}{2} \varrho \vec{v}^2) - \varrho \vec{K} \cdot \vec{v} \right\} dV_n + \int_{\partial\Omega} \left\{ (\varrho e + \frac{1}{2} \varrho \vec{v}^2) + p \right\} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma \\ = \int_{\partial\Omega} \lambda \varrho (\vec{n} \cdot \nabla_{(x)} \Theta) d\sigma \quad \text{für jedes Kontrollvolumen } \Omega. \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

Unter Voraussetzung der Stetigkeit des Integranden in (1.1.25) gilt also die **Energie–Bilanzgleichung in differenzieller Form:**

$$(\varrho e + \frac{1}{2}\varrho \vec{v}^2)_t + \operatorname{div}_{(x)}\{(\varrho e + \frac{1}{2}\varrho \vec{v}^2)\vec{v}\} + \operatorname{div}_{(x)}\{p\vec{v} - \lambda\varrho \nabla_{(x)}\Theta\} = \varrho \vec{K} \cdot \vec{v}. \quad (1.1.27)$$

Außer in der Strömungsmechanik finden Erhaltungsgleichungen vielerorts Anwendungen. Wir wollen zwei Beispiele herausgreifen.

1.1.6 Die Erhaltungsgleichung für den Verkehrsfluß in einer Einbahnstraße: ([128] S.17) Wir betrachten eine Einbahnstraße mit einer Spur ohne Zu– oder Abfahrten, eine Situation, die z.B. bei längeren Tunneln vorliegt. Hier seien ρ die Autozahl/km, v die mittlere lokale Geschwindigkeit in km/h und $q = \rho v$ der Fluß/h.

Aus experimentellen Messungen hat man das folgende empirische Flußgesetz aufgestellt:

$$q = Q(\rho) = 11\rho \log \frac{142}{\rho}, \quad v(\rho) = 11 \log \frac{142}{\rho}. \quad (1.1.28)$$

Die Erhaltungsgleichung lautet hier

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Q(\rho) = 0. \quad (1.1.29)$$

Wenn man Voraussagen über die Verkehrsentwicklung machen will, benötigt man einen Anfangszustand, etwa zur Zeit $t = 0$, der durch eine Anfangsdichte beschrieben wird,

$$\rho(x,0) = \rho_0(x). \quad (1.1.30)$$

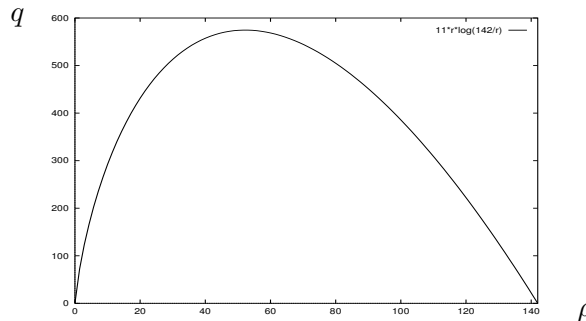


Bild 1: Empirisches Flußgesetz

Die Lösung der Differentialgleichung (1.1.29) mit der Anfangsbedingung (1.1.30) wird uns die Verkehrsentwicklung beschreiben.

1.1.7 Eindimensionale Sedimentationsvorgänge: Bei der Kupfergewinnung wird granuliertes Kupfererz ausgewaschen und dabei das Gesteins–Flüssigkeitsgemisch in großen Sedimentationsbottichen wieder voneinander getrennt, um das Wasser zurückzugewinnen. Für die Dimensionierung und einen effizienten und gesteuerten Betrieb dieser Bottiche ist eine genaue Kenntnis des Sedimentationsvorganges erforderlich.

Hier bezeichnet x die Ortskoordinate. Sie beschreibt die Höhe, in der die Konzentration $u(x,t)$ des volumetrischen Feststoffanteils auftritt, und t ist wieder die Zeit.

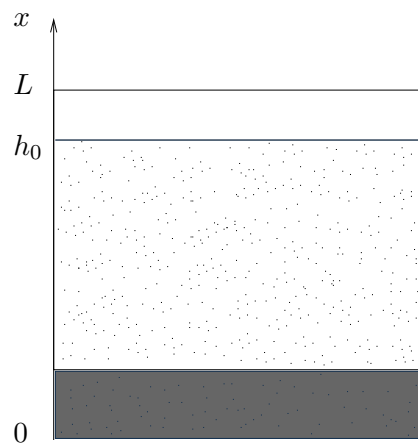


Bild 2: Sedimentationsbottich

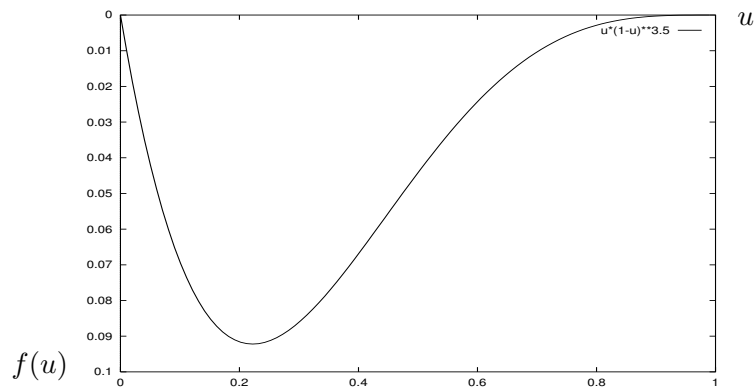
Mit $f(u)$ bezeichnen wir das sogenannte **Flußgesetz**, das als konstitutive Gleichung aus experimentellen Messungen bereitgestellt werden muß. Dann lautet die Kontinuitätsgleichung

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 . \quad (1.1.31)$$

Ein den Realitäten häufig hinreichend entsprechendes einfaches Flußgesetz ist z.B.

$$f(u) = u \cdot (1 - u)^\alpha$$

mit einer gegebenen Material-Konstanten $\alpha > 1$.

Bild 3: Flußgesetz in der Sedimentation mit $\alpha = 3.5$

Hier kennt man neben der Anfangsdichte $u_0(x)$ noch die Dichte $F(t)$ am Boden, wo sich die Partikel abgesetzt haben, d.h.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) && \text{für } 0 \leq x \leq h_0 , \\ u(0,t) &= F(t) , \quad u(h_0,t) = 0 && \text{für } t > 0 . \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

(Siehe dazu [20, 22, 23, 24, 26, 27, 33, 84, 85] .)

Weitere Probleme aus den Anwendungen, die auf die einfache Erhaltungsgleichung (1.1.31) führen, sind Flutwellen in Flüssen, chemische Austauschprozesse, das Wachstum von Gletschern, die Erosion im Gebirge (siehe [128]) und schließlich die vereinfachte Form der Boltzmannschen Transportgleichung (siehe [6, 28] , [62] Kap. 22). Auch die Ausbreitung von Wellen führt auf Gleichungen der Gestalt (1.1.31).

Aufgabe 1: Man formuliere und beweise das Reynoldssche Transport-Theorem für eine Raumdimension.

1.2 Die Ausbreitung von Wellen

Wellenvorgänge sind uns wohlbekannt aus der Akustik, dem Verhalten elastischer Materialien und aus elektromagnetischen Vorgängen. Ungedämpfte Wellenvorgänge in eindimensionalen Medien werden durch die **Wellengleichung**

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0 \quad (1.2.1)$$

beschrieben, wobei c_0 die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist. Führen wir die sogenannten **charakteristischen Koordinaten**

$$\alpha = x - c_0 t \quad \text{und} \quad \beta = x + c_0 t \quad (1.2.2)$$

und zugehörige Richtungsableitungen ein, so transformiert sich (1.2.1) in

$$u_{\alpha\beta} = 0 ,$$

woraus man sofort die Gestalt der allgemeinen Lösung als

$$u(x,t) = g(x - c_0 t) + h(x + c_0 t) \quad (1.2.3)$$

mit beliebigen Funktionen g und h ablesen kann. Wenn g, h zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt werden, dann erhalten wir eine klassische Lösung von (1.2.1). Für allgemeinere g und h ergeben sich sogenannte verallgemeinerte Lösungen.

Für das **Anfangswertproblem**

$$u(x,0) = \Phi_0(x) , \quad u_t(x,0) = \Phi_1(x) \quad (1.2.4)$$

ergibt sich aus (1.2.3) die **D'Alembertsche Lösungsformel** ,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\Phi_0(x - c_0 t) + \Phi_0(x + c_0 t)) + \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0 t}^{x+c_0 t} \Phi_1(s) ds . \quad (1.2.5)$$

Für die Lösung (1.2.3) lesen wir ab, daß sie sich aus einer nach rechts mit der Geschwindigkeit c_0 laufenden Welle $g(x - c_0 t)$ sowie einer nach links mit der gleichen Geschwindigkeit laufenden Welle $h(x + c_0 t)$ zusammensetzt. Ist $h \equiv 0$, so ist die nach rechts laufende Welle durch das Anfangsprofil $g(x) = u(x,0)$ vollständig bestimmt.

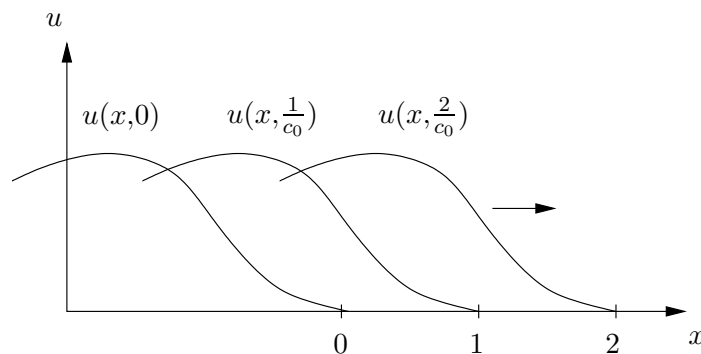


Bild 4: Nach rechts laufende Welle

Die nach rechts laufende Welle g erfüllt die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) g(x - c_0 t) = -c_0 g' + c_0 g' = 0, \quad (1.2.6)$$

also mit $u = g(x - c_0 t)$ auch die Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

Wir nennen deshalb die folgende Differentialgleichung erster Ordnung die **vereinfachte Wellengleichung**:

$$u_t + c(u)u_x = 0. \quad (1.2.7)$$

Zusätzlich stellen wir eine

Anfangsbedingung:

$$u(x, 0) = g(x).$$

Man beachte, daß die vereinfachte Wellengleichung (1.2.7) die gleiche Gestalt wie die Transportgleichung (1.1.31) hat.

Außer in den o.g. Anwendungen ergibt sich eine ähnliche Gleichung beim Übergang von der Wellen- zur Strahlenoptik auch als Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für das sogenannte Eikonale u , man nennt sie auch

Eikonalgleichung:

$$u_t + L(u_x, x, t) = 0.$$

Hierbei ist L die gegebene Lagrange-Funktion (siehe z.B. [57] und [93]).

Aufgabe 2: Man zeige, daß für $\Phi_0 \in C^2$, $\Phi_1 \in C^1$ durch (1.2.5) die Gesamtheit aller Lösungen von (1.2.1), (1.2.4) gegeben wird. Wie könnten Anfangswertproblem und Lösung für nur stetige Vorgaben Φ_0, Φ_1 sinnvoll verallgemeinert werden?

Aufgabe 3: Man löse das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_0^2 u_{xx} &= 0 && \text{für } 0 < x < l \text{ und } t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \\ u(x,0) &= \Phi(x), \quad u_t(x,0) = \Psi(x) && \text{für } 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

mit Hilfe der D'Alembertschen Lösungsformel (1.2.5), indem man Φ und Ψ durch Spiegelungen zu geeigneten Funktionen Φ_0, Φ_1 nach ganz \mathbb{R} fortsetzt (siehe auch [118] S.67 ff.).

1.3 Das Charakteristikenverfahren

Alle obigen Differentialgleichungen sind mit $t = y$ von der Form

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u). \quad (1.3.1)$$

Gleichungen von dieser Gestalt nennt man **quasilineare Differentialgleichungen** erster Ordnung.

Wir setzen in diesem Kapitel $a, b, c \in C^1(\mathcal{G})$ voraus, wobei $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ ein geeignetes Gebiet sei. Wenn von einer Lösung u von (1.3.1) die Rede ist, so wird stillschweigend angenommen, daß es sich um eine C^1 -Funktion auf einem Gebiet im \mathbb{R}^2 handelt, deren Graph in \mathcal{G} liegt. Die linke Seite von (1.3.1) können wir als eine Richtungsableitung von u in der durch (a, b) gegebenen Richtung auffassen. Für eine vorgelegte Lösung von (1.3.1) sei $\tilde{\mathcal{C}} : \{x(s), y(s)\}$ eine Lösungskurve des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u(x, y)), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u(x, y)). \quad (1.3.2)$$

Dann gilt auf Grund der Kettenregel

$$\frac{d}{ds}(u|_{\tilde{\mathcal{C}}}) = au_x + bu_y = c. \quad (1.3.3)$$

Wir halten fest: Jede Lösung u von (1.3.1) erfüllt längs der durch (1.3.2) gegebenen Kurve die **gewöhnliche** Differentialgleichung (1.3.3).

Umgekehrt werden wir weiter unten sehen, daß sich lokal jede Lösung von (1.3.1) aus den **Charakteristiken**, die wir als die Lösungskurven

$\mathcal{C} : \{x(s), y(s), u(s)\}$ der **charakteristischen Differentialgleichungen**

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u), \quad \frac{du}{ds} = c(x, y, u) \quad (1.3.4)$$

definieren, aufbauen läßt.

Für $a, b, c \in C^1$ ist die Charakteristik durch den Anfangspunkt (x_0, y_0, z_0) eindeutig. Nun wählen wir den Anfangspunkt in Abhängigkeit eines Parameters,

$$x(0) = x_0(\tau), \quad y(0) = y_0(\tau), \quad u(0) = u_0(\tau) = \phi_0(\tau), \quad \tau \in [0, T],$$

d.h. auf einer **Anfangskurve** $x = x_0(\tau), y = y_0(\tau)$ mit der **Anfangsbedingung**

$$u(x_0(\tau), y_0(\tau)) = u_0(\tau) = \phi_0(\tau). \quad (1.3.5)$$

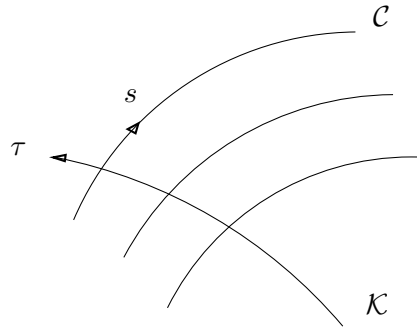


Bild 5: Charakteristikenschar durch eine Anfangskurve

Verschieben wir nun den Anfangspunkt der Charakteristik \mathcal{C} entlang der Anfangskurve \mathcal{K} , so entsteht eine Fläche, von der wir zeigen werden, daß sie eine Lösung der Differentialgleichung definiert. Diese Konstruktion ist nicht mehr möglich, wenn die Anfangskurve die gleiche Richtung wie die durch sie gelegte Charakteristik hat, wir müssen also Beziehungen der Gestalt

$$\dot{x}_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \lambda a \quad , \quad \dot{y}_0 = \frac{dy_0}{d\tau} = \lambda b$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ausschließen. Wir fassen diese heuristischen Überlegungen zusammen in dem folgenden Satz, den wir weiter unten beweisen werden:

1.3.1 Satz: $\mathcal{K} : \{x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau)\}$ sei für $\tau \in [0, T]$ eine reguläre C^1 -Kurve in \mathcal{G} mit

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \end{vmatrix} \Big|_{\mathcal{K}} \neq 0 \quad \text{für alle } \tau \in [0, T]. \quad (1.3.6)$$

Dann hat das Cauchy-Problem (1.3.1), (1.3.5) in einer geeigneten Umgebung von \mathcal{K} genau eine stetig differenzierbare Lösung u .

Bemerkung: Man beachte, daß dieser Satz die Existenz der Lösung nur in einem eventuell sehr schmalen Streifen um die Anfangskurve \mathcal{K} liefert; man sagt, dies ist die Existenz **im Kleinen**. Ihre Konstruktion mit Hilfe der Charakteristiken erfordert deren Parameterabhängige Berechnung.

Beweis: Bekanntlich ist die Lösung der charakteristischen Differentialgleichungen (1.3.4) mit (1.3.5) zur Lösung der Volterraschen Integralgleichungen

$$\begin{aligned} X(s, \tau) &= x_0(\tau) + \int_0^s a(X(\sigma, \tau), Y(\sigma, \tau), U(\sigma, \tau)) d\sigma, \\ Y(s, \tau) &= y_0(\tau) + \int_0^s b(X(\sigma, \tau), Y(\sigma, \tau), U(\sigma, \tau)) d\sigma, \\ U(s, \tau) &= \phi_0(\tau) + \int_0^s c(X(\sigma, \tau), Y(\sigma, \tau), U(\sigma, \tau)) d\sigma \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

äquivalent, die genau eine Lösung

$$\{X(s,\tau), Y(s,\tau), U(s,\tau)\} \quad (1.3.8)$$

haben mit $X(0,\tau) = x_0(\tau)$, $Y(0,\tau) = y_0(\tau)$, $U(0,\tau) = \phi_0(\tau)$ für alle $\tau \in [0, T]$ und $s \in [-S_0, S_0]$, wobei $S_0 > 0$ eine geeignete Konstante ist. (1.3.8) ist dann auch die einzige Lösung des charakteristischen Anfangswertproblems (1.3.1), (1.3.5). In Hinblick auf Bemerkung 1.3.1 ist also die Eindeutigkeitsaussage klar. Wegen $a, b, c \in C^1$ ist $X, Y, U \in C^1([-S_1, S_1] \times [0, T_0])$ unter Ausnutzung der glatten Abhängigkeit von der Anfangsvorgabe, vgl. [120] S. 103. Differenziert man (1.3.7) nach s und τ oder zweimal nach s , so liest man ab, daß auch noch $X_{s\tau}, Y_{s\tau}, U_{s\tau}, X_{ss}, Y_{ss}, U_{ss}$ dort stetig sind.

Wie wir weiter unten zeigen werden, bestimmen X, Y, U bereits die

Lösung in Parameterdarstellung:

$$u(X(s,\tau), Y(s,\tau)) = U(s,\tau). \quad (1.3.9)$$

Aus dieser wollen wir die Lösung in den ursprünglichen Koordinaten x, y bestimmen. Dazu lösen wir die Gleichungen

$$x = X(s,\tau), \quad y = Y(s,\tau) \quad (1.3.10)$$

nach s und τ auf. Das Ergebnis nennen wir

$$\begin{aligned} s &= S(x,y) = S(X(s,\tau), Y(s,\tau)), \\ \tau &= T(x,y) = T(X(s,\tau), Y(s,\tau)) \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

und setzen (1.3.11) in (1.3.9) ein. Das liefert die Funktion

$$u(x,y) = U(S(x,y), T(x,y)), \quad (1.3.12)$$

die sich als die gesuchte Lösung erweisen wird. Für die Auflösung benötigen wir den **Satz über implizite Funktionen:**

1.3.2 Satz über implizite Funktionen: [42]S.268

$$F(s,\tau,x,y) := X(s,\tau) - x, \quad G(s,\tau,x,y) := Y(s,\tau) - y$$

seien stetig differenzierbare Funktionen in einer offenen Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^4$. Im Punkt $(s_0, \tau_0, x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ seien $F = 0$, $G = 0$, und die Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial(F,G)}{\partial(s,\tau)} \right|$ sei dort von Null verschieden.

Dann gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^2$ von (x_0, y_0) derart, daß für jede offene zusammenhängende in \mathcal{U}_0 enthaltene Umgebung \mathcal{U} von (x_0, y_0) eindeutig bestimmte stetige Funktionen $S(x,y), T(x,y)$ auf \mathcal{U} existieren mit

$$S(x_0, y_0) = s_0, \quad T(x_0, y_0) = \tau_0, \quad (S(x,y), T(x,y), x, y) \in \mathcal{A}$$

und

$$F(S(x,y), T(x,y), x, y) = 0, \quad G(S(x,y), T(x,y), x, y) = 0$$

für jedes $(x,y) \in \mathcal{U}$. Ferner sind S und T in \mathcal{U} stetig differenzierbar.

Fortsetzung des Beweises von Satz 1.3.1: Auf \mathcal{K} gilt bereits $x = x_0(\tau) = X(0,\tau)$, $y = y_0(\tau) = Y(0,\tau)$, das heißt, daß wir dort nach $s = 0$ und $\tau = x_0^{-1}(x)$ auflösen können. Wegen

$$\begin{vmatrix} X_s & Y_s \\ X_\tau & Y_\tau \end{vmatrix} (0,\tau) = \begin{vmatrix} a(x_0,y_0,u_0) & b(x_0,y_0,u_0) \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \end{vmatrix} (\tau) \neq 0 \text{ für } \tau \in [0,T_0]$$

nach Voraussetzung (1.3.6) können wir also die Gleichungen (1.3.10) nach s und τ lokal auflösen, d.h. in einer Umgebung von \mathcal{K} existieren C^1 -Funktionen S und T mit (1.3.11).

Wir zeigen nun, daß $u(x,y)$ aus (1.3.12) das Cauchy–Problem löst. Die Anfangsbedingung (1.3.5) ist offensichtlich erfüllt; außerdem gilt aufgrund der Kettenregel und der charakteristischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= X_s(U_s S_x + U_\tau T_x) + Y_s(U_s S_y + U_\tau T_y) \\ &= U_s(S_x X_s + S_y Y_s) + U_\tau(T_x X_s + T_y Y_s) \\ &= U_s \frac{\partial}{\partial s} S(X,Y) + U_\tau \frac{\partial}{\partial s} T(X,Y) \\ &= c \frac{\partial}{\partial s} s + U_\tau \frac{\partial}{\partial s} \tau = c, \end{aligned}$$

d.h. u löst (1.3.1). □

Der Beweis zeigt, daß die Lösung des Cauchy–Problems durch das Lösen des Systems (1.3.4) mit den von τ abhängigen Anfangsbedingungen (1.3.5) in Parameterdarstellung gewonnen werden kann. Diese explizite Darstellung der Funktionen S, T in (1.3.11) ist i.a. allerdings nicht zu erwarten.

Zur konstruktiven und numerischen Lösung von (1.3.7) können wir übliche Verfahren für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen heranziehen: Klassisch ist die Picard–Lindelöf–Iteration. Dazu ersetzen wir zunächst zur Vereinfachung die Definitionsbereiche aller Funktionen durch den ganzen Raum: Sei \mathcal{G} ein reguläres Gebiet zu (1.3.1) mit $a, b, c \in C^1(\mathcal{G})$ und sei $\mathcal{B} \Subset \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ ein beliebiges Kompaktum und im folgenden immer fest: sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$, und sei $\psi(x,y,u)$ eine Funktion mit $\psi \in C_0^\infty(\mathcal{G})$ und $\psi|_{\mathcal{B}} \equiv 1$.¹

Ersetzen wir überall in (1.3.1) a, b, c durch $\tilde{a} = \psi a$, $\tilde{b} = \psi b$, $\tilde{c} = \psi c$, dann haben wir in \mathcal{B} die ursprüngliche Differentialgleichung und ihre Lösungen. Mit den neuen Koeffizienten lautet die Picard–Iteration

$$\begin{aligned} X_{n+1}(s,\tau) &= x_0(\tau) + \int_0^s \tilde{a}(X_n(\sigma,\tau), Y_n(\sigma,\tau), U_n(\sigma,\tau)) d\sigma, \\ Y_{n+1}(s,\tau) &= y_0(\tau) + \int_0^s \tilde{b}(X_n(\sigma,\tau), Y_n(\sigma,\tau), U_n(\sigma,\tau)) d\sigma, \\ U_{n+1}(s,\tau) &= u_0(\tau) + \int_0^s \tilde{c}(X_n(\sigma,\tau), Y_n(\sigma,\tau), U_n(\sigma,\tau)) d\sigma \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

¹ Erläuterung: ψ kann man wie folgt konstruieren: Wir wählen zwei weitere kompakte Mengen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ mit $\mathcal{B}_1 \Subset \mathcal{G}$, $\mathcal{B} \subset \overset{\circ}{\mathcal{B}}_1$, $\mathcal{B}_2 \Subset \mathcal{G}$, $\mathcal{B}_1 \subset \overset{\circ}{\mathcal{B}}_2$. Dann existiert zu $\psi_0 = 1$ auf \mathcal{B}_1 und $\psi_0 = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \overset{\circ}{\mathcal{B}}_2$ nach dem Satz von Tietze–Uryson [42] S.61 ff. eine stetige Fortsetzung $\psi_0 \in C(\mathbb{R}^3)$, die oBdA. $0 \leq \psi_0 \leq 1$ erfüllt. Nun definiere man mit geeignetem genügend kleinem $\varepsilon > 0$ die Mollifier-Funktion $\psi(x) := J_\varepsilon \psi_0(x)$ [50] p.12 .

mit $X_0(s, \tau) = x_0(\tau)$, $Y_0(s, \tau) = y_0(\tau)$ und $U_0(s, \tau) = u_0(\tau)$. Jetzt sind $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ beschränkte Funktionen und erfüllen eine globale Lipschitzbedingung, nämlich

$$\begin{aligned} & |\tilde{a}(x, y, u) - \tilde{a}(\xi, \eta, v)| + |\tilde{b}(x, y, u) - \tilde{b}(\xi, \eta, v)| + |\tilde{c}(x, y, u) - \tilde{c}(\xi, \eta, v)| \\ & \leq L\{|x - \xi| + |y - \eta| + |u - v|\}. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Die Konstante $\alpha > L$ wird fest gewählt, sei $q := \frac{L}{\alpha} < 1$. Sei $\tau \in I = [0, T_0]$ und $|s| \leq S$ mit beliebigem, für das Folgende festem $S > 0$. Für (1.3.13) benutzen wir den Vektorraum der auf $[-S, S] \times I$ stetigen vektorwertigen Funktionen

$$\mathbf{B} := (C^0([-S, S] \times I))^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = (X(s, \tau), Y(s, \tau), U(s, \tau))^T \in \mathbf{B}$$

und versehen \mathbf{B} mit der Bielecki-Norm, d.h. der gewichteten Maximum-Norm

$$\|\mathbf{F}\| := \max_{|s| \leq S, \tau \in I} \{|X(s, \tau)e^{-\alpha|s|}|^2 + |Y(s, \tau)e^{-\alpha|s|}|^2 + |U(s, \tau)e^{-\alpha|s|}|^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

(1.3.13) ist dann die sukzessive Approximation

$$\mathbf{F}_{n+1} := \mathbf{T}(\mathbf{F}_n)$$

im Banach-Raum \mathbf{B} zur Fixpunktgleichung

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}(\mathbf{F}),$$

wobei der Operator \mathbf{T} durch die rechte Seite von (1.3.13) erklärt ist.

Wir zeigen nun, daß \mathbf{T} in \mathbf{B} Kontraktion ist. Mit $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathbf{B}$, $\mathbf{F} = (X, Y, U)^T$, $\mathbf{G} = (Z, W, V)^T$ gilt

$$\begin{aligned} & |(\mathbf{T}(\mathbf{F}) - \mathbf{T}(\mathbf{G}))e^{-\alpha|s|}| \\ & \leq e^{-\alpha|s|} \left\{ \left| \int_0^s (\tilde{a}(X, Y, U) - \tilde{a}(Z, W, V)) d\sigma \right| + \left| \int_0^s (\tilde{b} \dots) \right| + \left| \int_0^s (\tilde{c} \dots) \right| \right\} \\ & \leq e^{-\alpha|s|} L \left| \int_0^s \{|X(\sigma, \tau) - Z(\sigma, \tau)| + \dots\} e^{-\alpha|\sigma|} e^{\alpha|\sigma|} d\sigma \right| \\ & \leq \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\| L e^{-\alpha|s|} \int_0^{|s|} e^{\alpha\sigma} d\sigma \\ & \leq \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\| L e^{-\alpha|s|} e^{\alpha|s|} \frac{1}{\alpha} = q \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|. \end{aligned}$$

Demnach erfüllt \mathbf{T} die Ungleichung

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{F}) - \mathbf{T}(\mathbf{G})\| \leq q \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\| \quad \text{mit} \quad q < 1, \quad (1.3.15)$$

d.h. \mathbf{T} ist *Kontraktion* in \mathbf{B} . Wir können also den **Banachschen Fixpunktsatz** verwenden, siehe z.B. [42] §10, [122]. Dieser liefert:

1.3.3 Lemma: $\mathbf{F}_n(s, \tau)$ konvergiert für jeden Startwert in \mathbf{B} , d.h. in $[-S, S] \times I$ gleichmäßig gegen die einzige Lösung der Fixpunkt- bzw. Integralgleichung

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}(\mathbf{F}) .$$

Es gelten die Fehlerabschätzungen

$$\|\mathbf{F}_n - \mathbf{F}\| \leq \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_0\| \frac{q^n}{1 - q} \quad (\text{a-priori})$$

und

$$\|\mathbf{F}_n - \mathbf{F}\| \leq \|\mathbf{F}_n - \mathbf{T}(\mathbf{F}_n)\| \frac{1}{1 - q} \quad (\text{a-posteriori}) .$$

Die Lösung $\mathbf{F} = (X(s, \tau), Y(s, \tau), U(s, \tau))^\top$ erfüllt offensichtlich

$$\frac{\partial X}{\partial s} = \tilde{a}(X(s, \tau), Y(s, \tau), U(s, \tau)), \quad \frac{\partial Y}{\partial s} = \tilde{b}, \quad \frac{\partial U}{\partial s} = \tilde{c},$$

und diese Ableitungen sind stetig.

Wie bereits oben gezeigt ergibt sich, daß $u(x, y) = U(S(x, y), T(x, y))$ die Differentialgleichung

$$u_x \tilde{a} + u_y \tilde{b} = \tilde{c}$$

erfüllt. Für $(x, y, u) \in \mathcal{B}$, d.h. in einer geeigneten Umgebung von \mathcal{K} sind $\tilde{a} = a$, $\tilde{b} = b$, $\tilde{c} = c$, und dort ist u Lösung von (1.3.1). \square

Im folgenden sollen noch einige geometrische Eigenschaften der Lösungen dargestellt werden.

1.3.4 Lemma: Sei $u(x, y)$ eine stetig differenzierbare Lösung von (1.3.1) im Gebiet $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ mit $(x, y, u(x, y)) \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$. Auf der Lösungsfläche gelte

$$a^2(x, y, u(x, y)) + b^2(x, y, u(x, y)) \neq 0 . \quad (1.3.16)$$

Dann liegt die Charakteristik \mathcal{C} durch $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ ganz auf der Lösungsfläche.

Beweis: Sei $\{x(s), y(s), U(s)\}$ die Charakteristik \mathcal{C} durch (x_0, y_0, u_0) . Dann betrachten wir auf der Lösung die Kurve

$$x = \tilde{x}(\sigma), \quad y = \tilde{y}(\sigma), \quad \tilde{z}(\sigma) = u(\tilde{x}(\sigma), \tilde{y}(\sigma))$$

mit

$$\frac{d\tilde{x}}{d\sigma} = a(\tilde{x}(\sigma), \tilde{y}(\sigma), u(\tilde{x}(\sigma), \tilde{y}(\sigma))), \quad \frac{d\tilde{y}}{d\sigma} = b(\tilde{x}(\sigma), \tilde{y}(\sigma), u(\tilde{x}(\sigma), \tilde{y}(\sigma))) .$$

Dies ist mit regulärer Parameterdarstellung möglich wegen

$$\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 = a^2 + b^2 \neq 0 .$$

Dann gilt auf der Lösungsfläche

$$\frac{d\tilde{z}}{d\sigma} = u_x \tilde{x}' + u_y \tilde{y}' = a(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) u_x + b(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) u_y = c(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) .$$

Damit erfüllt die Kurve auf der Lösungsfläche die charakteristischen Differentialgleichungen (1.3.2) und (1.3.3). Diese haben durch (x_0, y_0, u_0) **genau eine** Lösung, da sie die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllen. Also muß obige Kurve die Charakteristik sein, wie behauptet wird.

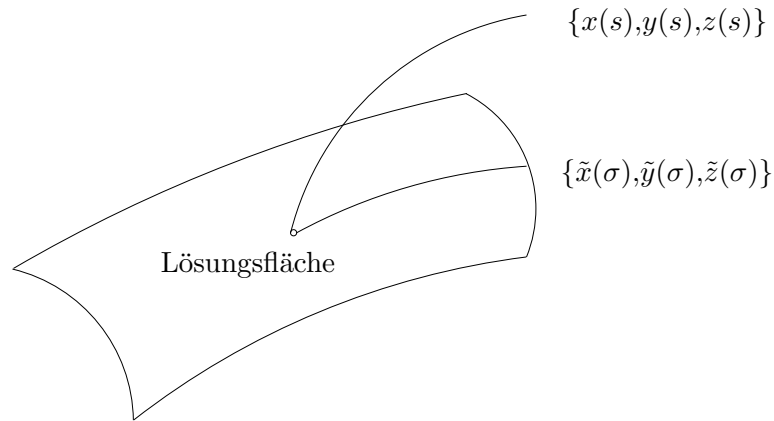


Bild 6: Lösungsfläche, Kurve $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ und Charakteristik \mathcal{C}

Die in Bild 6 skizzierte Situation tritt also gar nicht ein, denn die Kurven $\{x(s), y(s), z(s)\}$ und $\{\tilde{x}(\sigma), \tilde{y}(\sigma), \tilde{z}(\sigma)\}$ fallen immer zusammen. \square

Wegen (1.3.16) definieren wir:

$$\Sigma := \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid a(x, y, u) = b(x, y, u) = 0\} \quad (1.3.17)$$

heißt **singuläres Gebilde**. Seien $a, b, c \in C^1(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$, dann nennen wir $\mathcal{B} = \mathcal{G} \setminus \Sigma$ einen **regulären Bereich**.

1.3.5 Lemma:

- (i) *Im regulären Bereich schneiden sich verschiedene Lösungsflächen nur längs Charakteristiken.*
- (ii) *Berühren sich zwei Lösungen in einem Punkt des regulären Bereiches, so berühren sie sich längs einer ganzen Charakteristik.*
- (iii) *Im regulären Bereich können sich Lösungen nur längs Charakteristiken verzweigen.*

Den Beweis dieses Lemmas überlassen wir dem Leser.

1.3.6 Beispiel: Man berechne die Lösung des Cauchy-Problems

$$yu_x + xu_y = x \quad \text{mit } u(x, 0) = x.$$

Lösung: Hier ist das singuläre Gebilde gegeben durch

$$\Sigma = \{(0, 0, u), \text{ d.h. } x = y = 0\},$$

besteht also nur aus dem Nullpunkt in der x - y -Ebene bzw. der u -Achse im \mathbb{R}^3 . Die Charakteristiken und ihre Differentialgleichungen sind gegeben als:

$$\frac{dX}{ds} = X' = Y, \quad Y' = X, \quad U' = X.$$

Differentiation liefert

$$X'' = Y' = X, \text{ d.h. } X'' - X = 0, Y = X', U' = X.$$

Folglich lauten die Gleichungen der Charakteristikschar:

$$\begin{aligned} X &= c_1 e^s + c_2 e^{-s}, \\ Y &= c_1 e^s - c_2 e^{-s}, \\ U &= c_1 e^s - c_2 e^{-s} + c_3. \end{aligned}$$

Die Projektion der Charakteristikschar erfüllt $X^2 - Y^2 = 4c_1 c_2$.
Die Anfangsbedingungen lauten in Parameterdarstellung:

$$x_0(\tau) = \tau, y_0(\tau) = 0, u_0(\tau) = \tau.$$

Damit ergeben sich

$$\left. \begin{aligned} X(0, \tau) &= c_1 + c_2 = \tau, \\ Y(0, \tau) &= c_1 - c_2 = 0, \\ U(0, \tau) &= c_1 - c_2 + c_3 = \tau, \end{aligned} \right\} \quad c_1 = c_2 = \frac{\tau}{2}, \quad c_3 = \tau,$$

und die Lösung lautet in Parameterdarstellung:

$$X(s, \tau) = \tau \cosh s, Y(s, \tau) = \tau \sinh s, U(s, \tau) = \tau \sinh s + \tau.$$

Elimination von τ und s (i.a. nur theoretisch möglich):

$$\tau^2 = x^2 - y^2 \text{ liefert } \tau = \pm \sqrt{x^2 - y^2} = x \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} = T(x, y)$$

und

$$\cosh s = \left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} \right)^{-1} \text{ ergibt } s = \operatorname{arcosh} \left\{ \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}} \right)^{-1} \right\} = S(x, y).$$

Damit erhalten wir die gewünschte Lösung,

$$u(x, y) = y + x \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}.$$

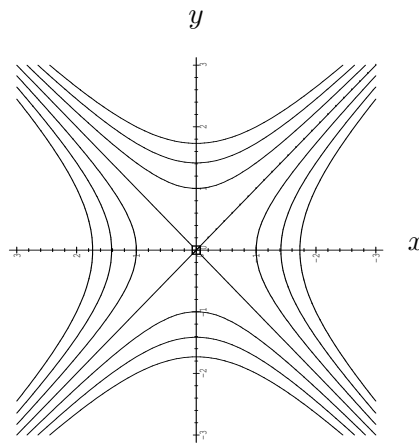


Bild 7: Projektion der Charakteristiken in die x - y -Ebene

1.3.7 Das Charakteristikenverfahren als Näherungsverfahren:

Zur numerischen Berechnung der Lösung von (1.3.3), (1.3.4) kann man z.B. das Eulersche Polygonzugverfahren verwenden. Dies liefert dann ein spezielles **Charakteristikenverfahren**:

Steigung der Näherungscharakteristik: $\Delta y : \Delta x = b : a$

Näherungswert für die Lösung: $u = u_0 + \Delta s \cdot c$

Die Funktionen a, b, c werden auf der Anfangskurve \mathcal{K} abgegriffen.

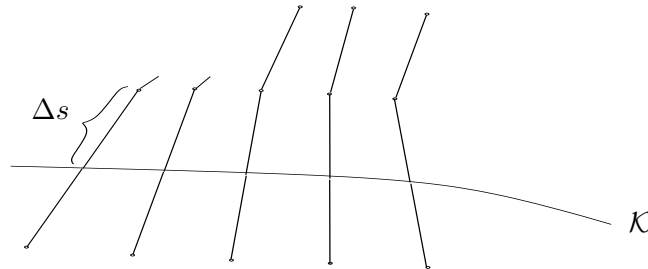


Bild 8: Skizze zum Charakteristikenverfahren

Wenn die Lösung in den skizzierten Punkten (näherungsweise) bestimmt ist, wählt man diese Punkte als neue Anfangspunkte.

Aufgabe 4: Man beweise Lemma 1.3.3.

Aufgabe 5: Man bestimme die Lösung des Cauchy-Problems für die Transportgleichung

$$u_y + u \cdot u_x = \frac{1}{y^2} \quad \text{mit} \quad u(1, y) = \sqrt{2} y .$$

Aufgabe 6: Man bestimme die Lösungen von

$$(1 + x^2)u_x + \frac{x}{y}u_y - x^2 \cdot \sqrt{1 + u} = 0$$

mit den Anfangsbedingungen in Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} a) \quad & x_0 = \tan \tau, \quad y_0 = \tau + 1, \quad u_0 = \tau - 1, \\ b) \quad & x_0 = 0, \quad y_0 = \tau, \quad u_0 = -1. \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Für das nicht charakteristische Anfangswertproblem (1.3.1), (1.3.4), (1.3.5) mit $\tau \in [0, 1]$ schreibe man ein Programm zur Anwendung der sogenannten Mittelpunkregel. Man wende es auf das in Aufgabe 6b) gestellte Problem für $\tau \in [0, 1]$ an.

Anleitung: [56] Bd.1, S.159ff.: Für eine gewöhnliche Differentialgleichung $u' = f(s, u)$ lautet die **Mittelpunkregel** für $s_{j+1} - s_j = N \cdot h$ mit gerader Zahl $N \in \mathbb{N}$:

1.) Berechne z_0, \dots, z_{k+1} aus

$$\begin{aligned} z_0 &= u_j, \quad z_1 = u_j + hf(s_j, u_j) \quad \text{sowie} \\ z_{k+1} &= z_{k-1} + hf(s_j + k \cdot h, z_k) \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

2.) Setze

Die rechten Seiten x_{10}, \dots, x_{n0} der Anfangsbedingungen (1.4.3) definieren eine **Anfangsmannigfaltigkeit** $\mathcal{M}_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und auf ihr die Anfangsbedingung $\Phi|_{\mathcal{M}_{n-1}} = \Phi_0$, wobei $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein geeigneter kompakter Parameterbereich ist.

Wir müssen wieder ausschließen, daß \mathcal{M}_{n-1} charakteristische Richtungen enthält, d.h. die Tangentenvektoren $\frac{\partial \vec{x}_0}{\partial \tau_\ell}|_{\mathcal{M}_{n-1}}$ für $\ell = 1, \dots, n-1$ dürfen nicht in Richtung $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top|_{\mathcal{M}_{n-1}}$ fallen. Dies bedeutet

$$D(0, \vec{\tau}) := \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{10}}{\partial \tau_1}, \dots, \frac{\partial x_{10}}{\partial \tau_{n-1}}, a_1(\vec{x}_0(\vec{\tau})) \\ \vdots \\ \frac{\partial x_{n0}}{\partial \tau_1}, \dots, \frac{\partial x_{n0}}{\partial \tau_{n-1}}, a_n(\vec{x}_0(\vec{\tau})) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ für } \vec{\tau} \in \mathcal{T}. \quad (1.4.4)$$

1.4.1 Satz: Die Koeffizienten a_1, \dots, a_n seien in einem Bereich $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ einmal stetig differenzierbar vorgegeben. Des weiteren seien vorgegeben die stetig differenzierbare Anfangsmannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{n-1} \subset \mathring{\mathcal{B}}$ und die Anfangsdaten Φ_0 . Die Anfangsmannigfaltigkeit sei nicht charakteristisch, d. h. es gelte (1.4.4).

Dann gibt es eine Umgebung \mathcal{U} von \mathcal{M}_{n-1} , in der genau eine Lösung $\Phi \in C^1$ des Cauchyschen Anfangswertproblems (1.4.1), (1.4.3) existiert.

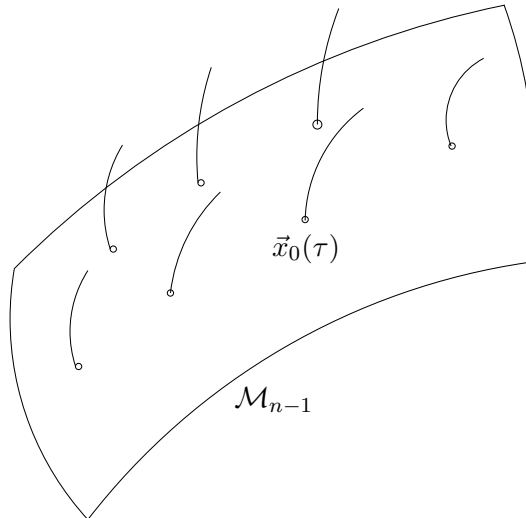


Bild 9: Anfangsmannigfaltigkeit und Charakteristiken für $n = 3$

Beweis: Satz 1.4.1 beweist man wieder mit Hilfe des Picardschen Iterationsverfahrens, das auch eine Konstruktion für die Lösung liefert; nämlich mittels der Funktionenfolge

$$\begin{aligned}
& X_{1\ell+1}(s, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\
&= x_{10}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) + \int_0^s a_1(X_{1\ell}(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}), \dots, X_{n\ell}) d\sigma, \\
&\quad \vdots \\
& X_{n\ell+1}(s, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\
&= x_{n0}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) + \int_0^s a_n(X_{1\ell}(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}), \dots, X_{n\ell}) d\sigma, \\
&\ell = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Des weiteren gilt wegen (1.4.2)

$$\tilde{\Phi}(s, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \Phi_0(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) .$$

Das Integrationsverfahren konvergiert in $[-S_0, S_0] \times \mathcal{T}$ gleichmäßig gegen $X_1(s, \tau_1, \dots, \tau_n), \dots, X_n(s, \tau_1, \dots, \tau_n)$. Die Lösung wird lokal durch den Diffeomorphismus $\vec{x} = \vec{X}(s, \vec{\tau})$ und die Funktion $\tilde{\Phi}(s, \tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ implizit gegeben. Auf der Anfangsmannigfaltigkeit \mathcal{M}_{n-1} gilt für die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(s, \tau_1, \dots, \tau_{n-1})} \right|_{s=0} = D(0, \vec{\tau}) \neq 0 .$$

Wieder kann man nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung von \mathcal{M}_{n-1} die Veränderlichen x_1, \dots, x_n als Unabhängige wählen und die Gleichungen

$$x_1 = X_1(s, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}), \dots, x_n = X_n(s, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}),$$

nach

$$s = S(\vec{x}), \tau_1 = T_1(\vec{x}), \dots, \tau_{n-1} = T_{n-1}(\vec{x})$$

auffösen. Man erhält hier die gesuchte Lösung in der Gestalt

$$\Phi(\vec{x}) := \tilde{\Phi}(S(\vec{x}), T_1(\vec{x}), \dots, T_{n-1}(\vec{x})) = \Phi_0(T_1(\vec{x}), \dots, T_{n-1}(\vec{x})), \tag{1.4.6}$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_j(\vec{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^{n-1} a_j(\vec{x}) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau_\ell} \frac{\partial T_\ell}{\partial x_j} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau_\ell} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial T_\ell}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial s} \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau_\ell} \frac{\partial}{\partial s} \left(T_\ell(\vec{X}(s, \vec{\tau})) \right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau_\ell} \frac{\partial \tau_\ell}{\partial s} = 0 .
\end{aligned}$$

Zwischen einer **quasilinearen** Differentialgleichungen erster Ordnung im \mathbb{R}^{n-1} ,

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j(\vec{x}, u) u_{x_j} = c(\vec{x}, u) \quad \text{mit} \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \tag{1.4.7}$$

und einer **linearen** Differentialgleichung (1.4.1) besteht ein enger Zusammenhang. Nehmen wir an, daß man $u(\vec{x})$ aus der impliziten Gleichung

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, u) = k = \textit{konstant} \quad (1.4.8)$$

bestimmen kann. Dann gilt nach Differentiation von (1.4.8)

$$\Phi_{x_j} + \Phi_u u_{x_j} = 0, \quad \text{d.h. } u_{x_j} = -\frac{\Phi_{x_j}}{\Phi_u} \quad \text{falls } \Phi_u \neq 0,$$

und (1.4.7) geht über in

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j \Phi_{x_j} + c \Phi_u = 0, \quad (1.4.9)$$

d.h. mit $x_n = u$ in eine lineare Gleichung der Gestalt (1.4.1) für Φ . □

1.4.2 Beispiel: Bestimme die Lösung von

$$x\Phi_x + yz\Phi_y + z^2\Phi_z = 0,$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Phi(1, y, z) = y + z$$

(a) mit der Basismethode; b) mit dem Charakteristikenverfahren.

Lösung: Die charakteristischen Differentialgleichungen lauten hier

$$\frac{dX}{ds} = X, \quad \frac{dY}{ds} = YZ, \quad \frac{dZ}{ds} = Z^2.$$

Die erste und die letzte Gleichung können sofort integriert werden und liefern

$$X = c_1 e^s, \quad Z = -(s - c_2)^{-1}.$$

Durch Einsetzen von Z in die zweite Gleichung findet man

$$\frac{d}{ds}(\log |Y|) = Z = -(s - c_2)^{-1} = \frac{d}{ds} \left(\log \left| \frac{c_3}{s - c_2} \right| \right),$$

d.h.

$$Y = c_3 (s - c_2)^{-1}.$$

Die Anfangsbedingung kann in der Parameterdarstellung

$$x_0 = 1, y_0 = \tau_1, z_0 = \tau_2, \Phi_0 = \tau_1 + \tau_2 = \tilde{\Phi}$$

geschrieben werden. Mit den Charakteristiken ergeben sich

$$\begin{aligned} X(0, \tau) &= c_1 = x_0 = 1, \\ Y(0, \tau) &= -\frac{c_3}{c_2} = \tau_1, \\ Z(0, \tau) &= \frac{1}{c_2} = \tau_2, \end{aligned}$$

also

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{\tau_2}, \quad c_3 = -\frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

Die Parameterdarstellung der Lösung ist demnach

$$X = e^s, \quad Y = \tau_1/(1 - \tau_2 s), \quad Z = \tau_2/(1 - \tau_2 s) \quad \text{und} \quad \tilde{\Phi} = \tau_1 + \tau_2.$$

Die Gleichungen für x, y , und z können nach s, τ_1 und τ_2 aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} s &= \log x =: S(x, y, z), \\ \tau_2 &= z/(1 + sz) = z/(1 + z \log x) =: T_2(x, y, z), \\ \tau_1 &= y/(1 - \tau_2 s) = y/(1 + z \log x) =: T_1(x, y, z). \end{aligned}$$

Einsetzen in $\tilde{\Phi}$ liefert die gesuchte Lösung

$$\Phi(x, y, z) = T_1 + T_2 = \frac{z + y}{1 + z \log x}. \quad \square$$

Wie zuvor nennen wir auch hier

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n |a_j|^2 = 0\} \quad (1.4.10)$$

das **singuläre Gebilde**. Im Beispiel 1.4.2 ist $\Sigma = \{\vec{0}\}$.

Bei linearen Differentialgleichungen kann man bekanntlich Lösungen **superponieren**. Deshalb versucht man auch hier, eine Basis für die allgemeine Lösung zu finden, und wir definieren: $n - 1$ Lösungen der Differentialgleichung (1.4.1)

$$\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}), \dots, \phi_{n-1}(\vec{x})$$

heißen im regulären Gebiet \mathcal{B} **Basislösungen**, wenn sie außerdem die Bedingung

$$\text{Rang} \frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \text{Rang} (\nabla\phi_1, \dots, \nabla\phi_{n-1}) = n - 1 \quad (1.4.11)$$

erfüllen.

1.4.3 Lemma: Sei $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ eine Basis im regulären Gebiet $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist die Lösungsgesamtheit von (1.4.1) gegeben durch

$$\Psi(\vec{x}) := \chi(\phi_1(\vec{x}), \dots, \phi_{n-1}(\vec{x})) \quad (1.4.12)$$

mit beliebiger stetig differenzierbarer Funktion $\chi = \chi(v_1, \dots, v_{n-1})$.

Wenn nämlich χ gegeben ist, dann gilt

$$\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} a_j(\vec{x}) \frac{\partial \chi}{\partial v_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \chi}{\partial v_k} \left\{ \sum_{j=1}^n a_j(\vec{x}) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \right\} = 0.$$

Also ist jede Funktion der Gestalt (1.4.12) eine Lösung der Differentialgleichung (1.4.1). In Lemma 1.4.3 wird aber auch noch behauptet, daß im regulären Bereich \mathcal{B} jede Lösung von (1.4.1) mit geeigneter Funktion χ in der Form (1.4.13) dargestellt werden kann. Letzteres erfordert einen gesonderten Beweis, den wir dem Leser zur Übung überlassen.

1.4.4 Folgerung: Die Lösungsgesamtheit der quasilinearen Differentialgleichung (1.4.7) ist implizit gegeben durch

$$\chi(\phi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, u), \dots, \phi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, u)) = k = \text{konstant} , \quad (1.4.13)$$

wobei $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ Basislösungen zu (1.4.7) sind und (x_1, \dots, x_{n-1}, u) im regulären Gebiet \mathcal{B} von (1.4.7) liegt.

1.4.5 Beispiel: Man bestimme die allgemeine Lösung zu

$$yu_x + xu_y = x .$$

Lösung: Dieser Gleichung ordnen wir die lineare Gleichung (1.4.9) zu:

$$y\phi_x + x\phi_y + x\phi_z = 0 .$$

Die Gleichungen der Charakteristiken lauten

$$X = c_1 e^s + c_2 e^{-s} , Y = c_1 e^s - c_2 e^{-s} , Z = c_1 e^s - c_2 e^{-s} + c_3 .$$

Entlang den Charakteristiken sind demnach die folgenden Funktionen konstant:

$$\phi_1 := x^2 - y^2 = 4c_1 c_2 , \quad \phi_2 := z - y = c_3 .$$

ϕ_1 und ϕ_2 sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

Die Funktionalmatrix

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \nabla \phi_1 \\ \nabla \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & , & -2y & , & 0 \\ 0 & , & -1 & , & 1 \end{pmatrix}$$

hat im regulären Gebiet Rang 2, d.h. für $(x, y) \neq (0, 0)$. Die Funktionen ϕ_1, ϕ_2 bilden also eine Basis. Die allgemeine Lösung u ist demnach implizit gegeben durch

$$\chi(x^2 - y^2, u - y) = k .$$

Anfangswertproblem: $u(x, 0) = x$.

Wir lösen die implizite Darstellung auf und erhalten

$$u - y = \Xi(x^2 - y^2) ,$$

also

$$u(x, 0) - 0 = \Xi(x^2) = x ,$$

und damit

$$\Xi(\xi) = \pm \sqrt{\xi} .$$

Daraus ergibt sich die Lösung als der zur Anfangsbedingung passende Lösungszweig, nämlich

$$u(x,y) = y \pm \sqrt{x^2 - y^2} = y + x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} . \quad \square$$

Aufgabe 10: Man bestimme die Lösungen der Cauchyschen Anfangswertprobleme

$$x\phi_x + y\phi_y + z\phi_z = 0$$

mit

$$\begin{aligned} a) \quad \phi(x,y,0) &= e^{-(x^2+y^2)} , \\ b) \quad \phi(x,y,1) &= e^{-(x^2+y^2)} . \end{aligned}$$

Aufgabe 11: Man bestimme Basislösungen zu

$$x\phi_x + yz\phi_y + z^2\phi_z = 0 .$$

Sodann löse man das Anfangswertproblem

$$\phi(1,y,z) = y + z$$

mit Hilfe der Basislösungen.

Aufgabe 12: Man zeige, daß die Kurven

$$\phi_1(x_1, \dots, x_n) = k_1, \dots, \phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = k_{n-1}$$

mit Basislösungen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ und Konstanten k_1, \dots, k_{n-1} im regulären Gebiet die Charakteristiken sind.

Aufgabe 13: Man beweise Lemma 1.4.3.

1.5 Charakteristikenverfahren für eine allgemeine Differentialgleichung 1. Ordnung im \mathbb{R}^2

Wir beginnen mit dem Fall $n = 2$ und einer Differentialgleichung der Gestalt

$$F(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y)) = 0 . \quad (1.5.1)$$

Ein wichtiges Beispiel einer solchen Gleichung ist die **Eikonalgleichung** für die Phasenfunktion $u(x)$ bei Wellenausbreitung. Die Kurven $u = \text{konst.}$ beschreiben die **Wellenfronten** der Ausbreitung schwacher Störungen:

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } u - \vec{n}^2(\vec{x}) = 0 . \quad (1.5.2)$$

Im \mathbb{R}^2 wird hieraus

$$F \equiv u_x^2 + u_y^2 - \vec{n}^2(x,y) = 0 . \quad (1.5.3)$$

(In §1.6 werden wir einige Bemerkungen zur Motivation dieser Gleichung machen.)

Wir versuchen wieder, für (1.5.1) geeignete gewöhnliche Differentialgleichungen auf der Lösungsfläche zu finden. Dazu nehmen wir zunächst an, daß eine zweimal stetig differenzierbare Lösungsfunktion $u(x,y)$ bekannt ist und definieren die Funktionen

$$p(x,y) := u_x(x,y) \quad , \quad q(x,y) := u_y(x,y) \quad . \quad (1.5.4)$$

Dann müssen p und q die Kompatibilitätsbedingung

$$u_{xy} = p_y = q_x = u_{yx} \quad (1.5.5)$$

erfüllen. Weil (1.5.1) sehr allgemein aussieht, versuchen wir für die Definition von Richtungsableitungen zu „linearisieren“: Auf der Lösungsfläche gelten

$$\frac{\partial}{\partial x} [F(x,y,u(x,y),p(x,y),q(x,y))] = F_x + F_u p + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} [F] = F_y + F_u q + F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} = 0 ,$$

bzw. mit der Kompatibilitätsbedingung (1.5.5),

$$F_p p_x + F_q p_y = -F_x - p F_u , \quad (1.5.6)$$

$$F_p q_x + F_q q_y = -F_y - q F_u . \quad (1.5.7)$$

Auf der linken Seite von (1.5.6) erkennen wir wieder **Richtungsableitungen** in Richtung $\vec{a} = (F_p, F_q)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= F_p , & \frac{dy}{ds} &= F_q , \\ \frac{dp}{ds} &= -F_x - p F_u , & \frac{dq}{ds} &= -F_y - q F_u . \end{aligned}$$

Dies sind 4 gewöhnliche Differentialgleichungen, während in (1.5.1), (1.5.4) die 5 Größen x,y,u,p,q vorkommen. Wir müssen deshalb noch (1.5.4) entlang der gewünschten Kurve integrieren, das bedeutet

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = p F_p + q F_q .$$

Wir nennen deshalb die durch das charakteristische System zu (1.5.1) definierten Kurven $\mathcal{C}: (X(s), Y(s), U(s), P(s), Q(s))$ im \mathbb{R}^5 die **Charakteristiken**, wenn sie das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen lösen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{ds} = F_p(X,Y,U,P,Q) , \quad \frac{dY}{ds} = F_q(X,Y,U,P,Q) , \\ \frac{dP}{ds} = -F_x - P F_u , \quad \frac{dQ}{ds} = -F_y - Q F_u , \\ \frac{dU}{ds} = P F_p + Q F_q . \end{array} \right. \quad (1.5.8)$$

Um als Projektion der Charakteristiken in die x - y -Ebene reguläre Kurven auszusondern, definieren wir wieder das sogenannte **singuläre Gebilde**

$$\Sigma := \{(x, y, u, p, q) \in \mathbb{R}^5 \mid F_p = F_q = 0\}$$

und betrachten in Zukunft die Charakteristiken als Kurven in $\mathbb{R}^5 \setminus \Sigma$.

Im 3-dimensionalen Raum können wir die 5-dimensionalen Charakteristiken auch als sogenannte **Mongesche Streifen** deuten:

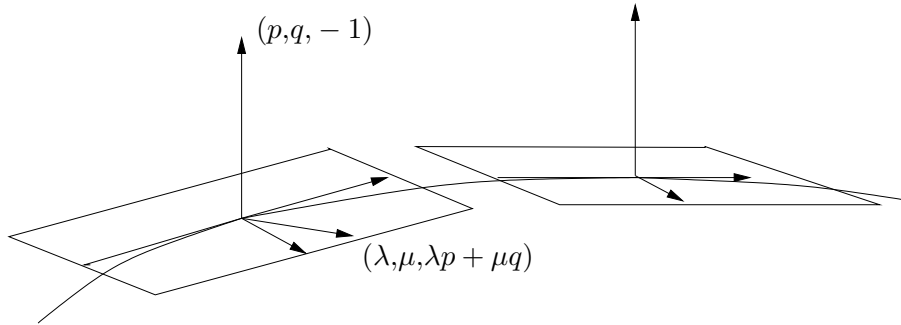


Bild 10: Mongescher Streifen

Die Differentialgleichung (1.5.1) erzwingt, daß nur Vektoren der Gestalt $(\lambda, \mu, \lambda p + \mu q)$ die Tangentialebene der Lösungsfläche in einem festen Punkt bilden können.

Wir sagen, eine Charakteristik heißt **Integralcharakteristik** und der zugehörige Mongesche Streifen heißt **Integralstreifen**, falls auf ihm die folgende Gleichung erfüllt wird:

$$F(X(s), Y(s), U(s), P(s), Q(s)) = 0. \quad (1.5.9)$$

1.5.1 Lemma: F ist entlang Mongeschen Streifen \mathcal{C} konstant.

Beweis: Mit (1.5.8) ergibt sich :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [F|_{\mathcal{C}}] &= F_x X' + F_y Y' + F_u U' + F_p P' + F_q Q' \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_u (P F_p + Q F_q) \\ &\quad + F_p (-F_x - P F_u) + F_q (-F_y - Q F_u) \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

1.5.2 Lemma: Sei $u \in C^2$ Lösung von (1.5.1) und \mathcal{C} sei ein Integralstreifen im regulären Bereich. Berührt \mathcal{C} die Lösungsfläche in einem Punkt, d.h. $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) \in \mathcal{C}$ und $F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0$ mit $u_0 = u(x_0, y_0)$, $p_0 = u_x(x_0, y_0)$, $q_0 = u_y(x_0, y_0)$ dann liegt \mathcal{C} ganz auf der Lösungsfläche.

Der Beweis kann ähnlich dem zu Lemma 1.3.4 erbracht werden. Wir überlassen ihn dem Leser.

Definition: Die Gesamtheit aller Integralstreifen durch einen Punkt $(x_0, y_0, u_0) \in \mathbb{R}^3$ heißt **Integral-Konoid**. Die Gesamtheit aller Mongeschen Streifen mit gleicher Konstanten $k = F|_{\mathcal{C}}$ heißt **charakteristisches Konoid**.

1.5.3 Beispiel: Man bestimme Charakteristiken, charakteristisches und Integral-Konoid zu

$$F \equiv u_x^2 + u_y^2 - 1 = p^2 + q^2 - 1 = 0 .$$

Lösung: Die charakteristischen Differentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned} X' &= 2P, \quad Y' = 2Q, \quad P' = 0, \quad Q' = 0, \\ U' &= 2P^2 + 2Q^2 = 2(1+k) . \end{aligned}$$

Dieses System läßt sich sofort integrieren und liefert die Charakteristiken:

$$P = c_3, \quad Q = c_4, \quad X = 2c_3s + c_1, \quad Y = 2c_4s + c_2, \quad U = 2(c_3^2 + c_4^2)s + c_5 .$$

Das charakteristische Konoid durch den Punkt (x_0, y_0, u_0) ergibt sich aus

$$F = k = c_3^2 + c_4^2 - 1 = k$$

als die einparametrische Schar

$$\begin{aligned} c_3 &= \sqrt{1+k} \cos \tau = P, \\ c_4 &= \sqrt{1+k} \sin \tau = Q, \\ X &= 2\sqrt{1+k} \cos \tau \cdot s + x_0, \\ Y &= 2\sqrt{1+k} \sin \tau \cdot s + y_0, \\ U &= 2(1+k)s + u_0 . \end{aligned}$$

Also genügt das charakteristische Konoid der Gleichung

$$(u - u_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 .$$

Das Integral-Konoid ergibt sich aus dem charakteristischen mit $k = 0$. In diesem Beispiel stimmen charakteristisches Konoid und Integral-Konoid überein.

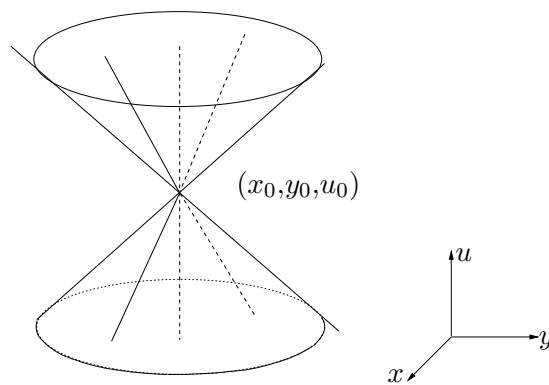


Bild 11: Integral-Konoid

Die Differentialgleichung unseres Beispiels ist eine besonders einfache Eikonalgleichung, für diese beschreibt das Integral-Konoid gerade den **Lichtkegel**.

Die Lemmata 1.5.1 und 1.5.2 motivieren wieder ein **Charakteristikenverfahren** für das Cauchysche Anfangswertproblem. Dieses lautet: *Man bestimme eine Lösung der Differentialgleichung (1.5.1), die Anfangsbedingung*

$$u(x_0(\tau), y_0(\tau)) = u_0(\tau) \quad (1.5.10)$$

erfüllt.

Zunächst bestimmen wir alle Integralcharakteristiken durch die Anfangskurve mit

$$X|_{s=0} = x_0(\tau), \quad Y|_{s=0} = y_0(\tau), \quad U|_{s=0} = u_0(\tau).$$

Dazu brauchen wir offensichtlich nicht nur die Anfangskurve, sondern den gesamten **Anfangsstreifen** \mathcal{S} , auf welchem

$$\frac{du_0}{d\tau} = u_x \dot{x}_0 + u_y \dot{y}_0 = p_0(\tau) \frac{dx_0}{d\tau} + q_0(\tau) \frac{dy_0}{d\tau} \quad (1.5.11)$$

und

$$F(x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)) = 0 \quad (1.5.12)$$

gelten. Damit wir eine echte Streifenschar bekommen, müssen wir für $x_0(\tau)$, $y_0(\tau)$ wieder verlangen, daß die Tangente an die Anfangskurve nicht charakteristisch wird, d.h. $\dot{x}_0 : \dot{y}_0 \neq F_p : F_q$. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann man dann auch (1.5.11), (1.5.12) lokal nach $p_0(\tau), q_0(\tau)$ auflösen.

1.5.4 Satz: Die Anfangskurve $\mathcal{K} : (x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau))$ sei zweimal stetig differenzierbare, reguläre Kurve für $\tau \in [0, T_0]$ und F in (1.5.1) sei zweimal stetig differenzierbar.

Dann existiert im regulären Bereich von F zu **jedem** nichtcharakteristischen Anfangsstreifen \mathcal{S} (1.5.11), (1.5.12) mit

$$\begin{vmatrix} F_{p|\mathcal{S}} & , & F_{q|\mathcal{S}} \\ \frac{dx_0}{d\tau} & , & \frac{dy_0}{d\tau} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.5.13)$$

jeweils genau eine stetig differenzierbare Lösung $u(x, y)$, deren Parameterdarstellung durch

$$x = X(s, \tau), \quad y = Y(s, \tau), \quad u = U(s, \tau), \quad p = P(s, \tau), \quad q = Q(s, \tau)$$

gegeben ist mit $X, Y, U, P, Q \in C^1([-S_0, S_0] \times [0, T_0])$ und $X_{s\tau}, X_{ss}, \dots, Q_{s\tau}, Q_{ss} \in C^0([-S_0, S_0] \times [0, T_0])$. Hierbei ist $S_0 > 0$ eine geeignete Konstante, die nur von F und dem Anfangsstreifen abhängt.

Beweis: Die Lösung in Parameterdarstellung ist durch die Familie von Lösungen der charakteristischen Differentialgleichungen mit Anfangspunkten auf \mathcal{S} definiert und kann aus dem Volterraschen Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned}
X(s,\tau) &= x_0(\tau) + \int_0^s F_p(X(\sigma,\tau), Y(\sigma,\tau), \dots, Q(\sigma,\tau)) d\sigma, \\
Y(s,\tau) &= y_0(\tau) + \int_0^s F_q(X(\sigma,\tau), Y(\sigma,\tau), \dots, Q(\sigma,\tau)) d\sigma, \\
U(s,\tau) &= u_0(\tau) + \int_0^s \{(P(\sigma,\tau) \cdot F_p(\dots) + Q(\sigma,\tau)F_q(\dots))\} d\sigma, \\
P(s,\tau) &= p_0(\tau) - \int_0^s \{F_x(\dots) + P(\sigma,\tau)F_u(\dots)\} d\sigma, \\
Q(s,\tau) &= q_0(\tau) - \int_0^s \{F_y(\dots) + Q(\sigma,\tau)F_u(\dots)\} d\sigma
\end{aligned} \tag{1.5.14}$$

entweder durch sukzessive Approximation oder auch durch numerische Integration z.B. nach Runge–Kutta gewonnen werden.

In einer geeigneten Umgebung der Anfangskurve \mathcal{K} definiert jede dieser Lösungen eine reguläre Lösungsmannigfaltigkeit \mathcal{M}_2 , die lokal durch $z = u(x,y)$, d.h. eine Lösung von (1.5.1) dargestellt werden kann, indem man mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen

$$x = X(s,\tau) \quad , \quad y = Y(s,\tau)$$

nach s,τ auflöst,

$$s = S(x,y) \quad , \quad \tau = T(x,y)$$

und dann in $U(s,\tau)$ einsetzt:

$$u(x,y) := U(S(x,y), T(x,y)) \quad .$$

Man beachte, daß es zu einer Anfangskurve \mathcal{K} i.a. mehrere Anfangsstreifen \mathcal{S} und auch **meh-rere** Lösungen geben kann.

Man kann den ersten Teil dieses Satzes wieder mit Hilfe des Verfahrens von Picard–Lindelöf, nämlich der sukzessiven Approximation für (1.5.14) beweisen.

Die Auflösung von $x = X(s,\tau), y = Y(s,\tau)$ nach s und τ ist möglich, weil auf dem Anfangsstreifen nach (1.5.13) die Ungleichung

$$D = \left| \frac{\partial(X,Y)}{\partial(s,\tau)} \right| \Big|_{s=0} = \left| \begin{array}{cc} F_p & F_q \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \end{array} \right| \Big|_{\mathcal{S}} \neq 0$$

vorausgesetzt wurde, und damit auch in einer geeigneten Umgebung von \mathcal{S} erfüllt ist. Dann muß man noch zeigen, daß $u(x,y) = U(S(x,y), T(x,y))$ die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung erfüllt. Letztere folgt aus (1.5.14) mit $s = 0$. Für die Differentialgleichung muß man außerdem auf der Lösungsfläche

$$u_x(X(s,\tau), Y(s,\tau)) = P(s,\tau) \quad \text{und} \quad u_y(X(s,\tau), Y(s,\tau)) = Q(s,\tau)$$

nachweisen. Das bedeutet anschaulich, daß sich die Integralstreifen nicht „verdrillen“ dürfen.

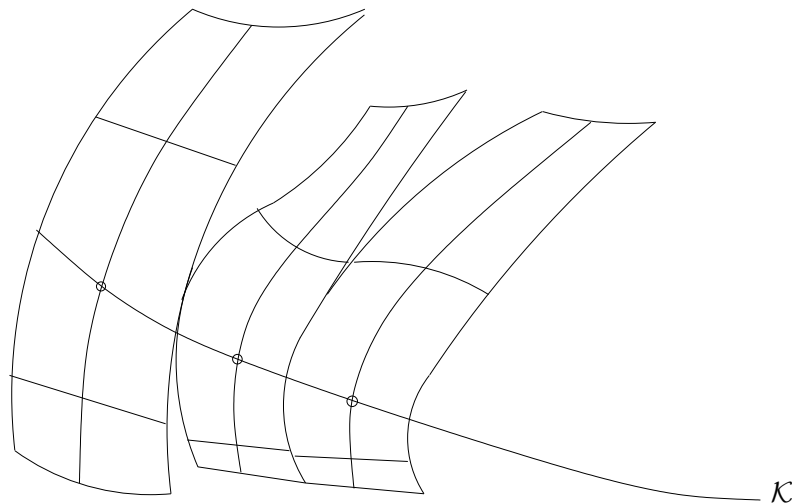


Bild 12: Verdrillte Streifen

Da die Details des Beweises von Satz 1.5.4 für $n = 2$ dieselben sind wie für $n > 2$, werden sie gleich für diesen allgemeineren Fall im Beweis von Satz 1.6.1 vorgeführt und deshalb hier fortgelassen. \square

1.5.5 Beispiel: Löse zur Differentialgleichung

$$F = u_x^2 + u_y^2 - 1 = 0,$$

das Anfangswertproblem $u(0,y) = y^2$.

Lösung: Zur Anfangsbedingung gibt es **zwei** Anfangsstreifen:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \tau, \quad u_0 = \tau^2,$$

denn aus

$$p_0^2 + q_0^2 = 1, \quad p_0 \dot{x}_0 + q_0 \dot{y}_0 = \dot{u}_0 = 2\tau$$

folgen

$$q_0 = 2\tau \quad \text{sowie} \quad p_0 = \pm \sqrt{1 - 4\tau^2}.$$

Die Charakteristiken entnehmen wir dem Beispiel 1.5.3. Dann ergibt sich die Lösung zu den obigen Anfangsstreifen in Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} X &= \pm 2s \sqrt{1 - 4\tau^2}, & P &= \pm \sqrt{1 - 4\tau^2} \\ Y &= \tau(1 + 4s), & Q &= 2\tau \\ U &= 2s + \tau^2. \end{aligned}$$

Aus ihr läßt sich eine implizite Darstellung der Lösungen gewinnen:

$$\begin{aligned} 4s &= 2(u - \tau^2), & y &= \tau + 2\tau(u - \tau^2), \\ \tau^3 - \tau\left(\frac{1}{2} + u\right) + \frac{y}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Die Cardanische Formel liefert

$$\tau = -\sqrt[3]{\frac{y}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 2\left(\frac{1+2u}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{y}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 2\left(\frac{1+2u}{3}\right)^3}}.$$

Einsetzen liefert

$$s = \frac{1}{2} \left\{ u - \left(\sqrt[3]{\frac{y}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 2\left(\frac{1+2u}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{y}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 2\left(\frac{1+2u}{3}\right)^3}} \right)^2 \right\}.$$

Setzen wir s und τ in die Darstellung von x^2 ein, so erhalten wir die **implizite** Darstellung beider Lösungen:

$$x^2 = \left\{ u - \left(\sqrt[3]{\frac{y}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 2\left(\frac{1+2u}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{y}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 2\left(\frac{1+2u}{3}\right)^3}} \right)^2 \right\}^2 \\ \times \left\{ 1 - 4 \left(\sqrt[3]{\frac{y}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 2\left(\frac{1+2u}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{y}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 2\left(\frac{1+2u}{3}\right)^3}} \right)^2 \right\}. \square$$

Im folgenden wollen wir nochmals auf die **geometrische Bedeutung der Charakteristiken** zurückkommen. Die Tangentialebene

$$\zeta = u + (\xi - x)p + (\eta - y)q, \quad (1.5.15)$$

an irgendeine Lösungsfläche im Punkt (x, y, u) muß die Gleichung

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad (1.5.16)$$

erfüllen, d.h. alle nur möglichen Lösungen durch (x, y, u) erlauben Tangentialebenen (1.5.15) unter Beachtung von (1.5.16). Das ist eine einparametrische Schar, gegeben durch $p(\tau)$, $q(\tau)$:

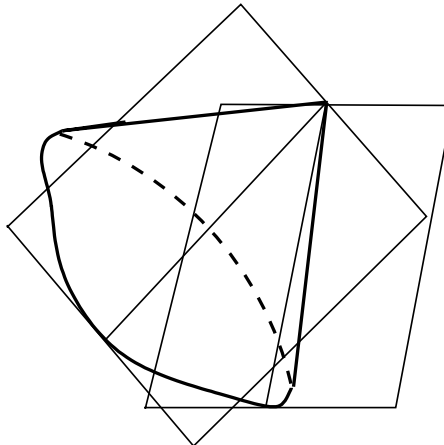


Bild 13: Charakteristischer Kegel und mögliche Tangentialebenen mit

$$\begin{aligned} (\xi - x)p(\tau) + (\eta - y)q(\tau) - (\zeta - u) &= 0, \\ F(x, y, u, p(\tau), q(\tau)) &= 0. \end{aligned}$$

Die Ebenenschar hüllt einen Kegel ein, den man mit der Enveloppenbedingung

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} F(x, y, u, p(\tau), q(\tau)) &= F_p \dot{p} + F_q \dot{q} = 0, \\ \frac{d}{d\tau} \{(\xi - x)p + (\eta - y)q - (\zeta - u)\} &= (\xi - x)\dot{p} + (\eta - y)\dot{q} = 0 \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

beschreiben kann. Die Enveloppenbedingung (1.5.17) liefert zusammen mit (1.5.14) in jedem regulären Punkt die

Erzeugenden des charakteristischen Kegels:

$$\begin{aligned} \xi - x &= \lambda F_p(x, y, u, p(\tau), q(\tau)), \\ \eta - y &= \lambda F_q(x, y, u, p(\tau), q(\tau)), \\ \zeta - u &= \lambda (pF_p + qF_q)(x, y, u, p(\tau), q(\tau)). \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

Im Falle einer *quasilinearen* Gleichung (1.3.1) mit

$$F = ap + bq - c,$$

wird aus (1.5.19)

$$\begin{aligned} \xi - x &= \lambda \cdot a(x, y, u), \\ \eta - y &= \lambda \cdot b(x, y, u), \\ \zeta - u &= \lambda \cdot c(x, y, u) \end{aligned}$$

mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}$, das bedeutet, *hier entartet der Kegel zur charakteristischen Richtung*. Alle nur möglichen Tangentialebenen an Lösungen in (x, y, u) bilden hier das Ebenenbündel mit gemeinsamer Geraden in Richtung $\vec{a} = (a, b, c)$.

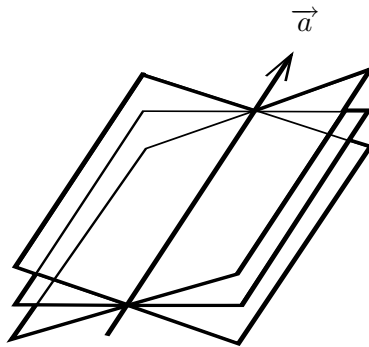


Bild 14: Ebenenbündel durch die charakteristische Richtung

Aufgabe 14: Man beweise Lemma 1.5.2.

Aufgabe 15: Man berechne zur Differentialgleichung

$$F \equiv xy - u_x \cdot u_y = xy - pq = 0$$

das Integral-Konoid durch (x_0, y_0, u_0) in Parameterdarstellung.

Aufgabe 16: Man berechne die Lösungen der Cauchyschen Anfangswertprobleme für $xy - u_x \cdot u_y = 0$ und

$$\begin{aligned} a) \quad u(1, y) &= y^2, \\ b) \quad u(x, x) &= \sqrt{2}x^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 17: Man bestimme charakteristische Kegel und zugehörige erzeugende Geraden zu

$$\begin{aligned} a) \quad F &\equiv xpq + yq^2 - 1 = 0, \\ b) \quad F &\equiv y^3p - xy^2q - ux = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 18: Im Punkt (x_0, y_0, u_0) sei für alle möglichen Tangentialebenen $p_0(\tau), q_0(\tau)$ mit

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0(\tau), q_0(\tau)) = 0$$

die Bedingung

$$\{F_p^2 F_{qq} - 2F_q F_p F_{pq} + F_q^2 F_{pp}\}(x_0, y_0, u_0, p_0(\tau), q_0(\tau)) \neq 0$$

erfüllt. Man zeige, daß unter dieser Bedingung das Integral-Konoid in einer Umgebung des Spitzenpunktes mit Ausnahme desselben eine Lösungsfläche der Differentialgleichung $F = 0$ definiert.

1.6 Die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung im \mathbb{R}^n

Die Lösung von

$$F(\vec{x}, u, \nabla u) = F(\vec{x}, u, \vec{p}) = 0, \quad \text{für } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \vec{p} = \text{grad } u \quad (1.6.1)$$

und $F \in C^2(\mathcal{G})$ in einem geeigneten Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n+1}$ verläuft ganz analog zum Fall $n = 2$. Auf einer Lösung $u = u(\vec{x})$ von (1.6.1) erhalten wir durch Differenzieren die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [F(\vec{x}, u(\vec{x}), p_i(\vec{x}))] = F_{x_i} + F_u p_i + \sum_{j=1}^n F_{p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (1.6.2)$$

Außerdem verlangen wir auf einer Lösung die Schwarzischen Vertauschungsregeln

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j}, \quad (1.6.3)$$

d.h. aus (1.6.2) wird

$$\sum_{j=1}^n F_{p_j} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = -F_{x_i} - F_u p_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Somit lauten hier die **charakteristischen Differentialgleichungen**:

$$\frac{dX_i}{ds} = F_{p_i}, \quad \frac{dP_i}{ds} = -F_{x_i} - P_i F_u, \quad \frac{dU}{ds} = \sum_{j=1}^n P_j F_{p_j}; \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.6.4)$$

Für $F \in C^2(\mathcal{G})$ gibt es durch jeden Punkt in $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ genau eine Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (1.6.4) mit den Anfangsbedingungen

$$X_i(0) = x_{i0}, \quad P_i(0) = p_{i0}, \quad U(0) = u_0. \quad (1.6.5)$$

Die Projektion in den Teilraum $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ werden Kurven im regulären Bereich, dem Komplement des **singulären Gebildes**

$$\Sigma = \{(\vec{x}, u, \vec{p}) \in \mathcal{G} \mid F_{p_i} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\}. \quad (1.6.6)$$

Die charakteristischen Kurven im \mathbb{R}^{2n+1} kann man im \mathbb{R}^{n+1} wieder als Mongesche Streifen und die Integralcharakteristiken als Integralstreifen auffassen. Die Lemmata 1.5.1 und 1.5.2 behalten ihre volle Gültigkeit.

Für das **Cauchysche Anfangswertproblem** sind nun Anfangsdaten auf einer $(n-1)$ -dimensionalen Anfangsmannigfaltigkeit \mathcal{M}_{n-1} vorzugeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n-1} : x_i = x_{i0}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ mit} \\ \text{Rang} \left(\left(\frac{\partial x_{i0}}{\partial \tau_j} \right)_{j=1, \dots, n-1}^{i=1, \dots, n} \right) = n-1. \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

Die Anfangsbedingung lautet

$$u(\vec{x}_0(\vec{\tau})) = u_0(\vec{\tau}) \text{ für } \vec{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{n-1}, \quad (1.6.8)$$

wobei \mathcal{T} ein geeigneter $(n-1)$ -dimensionaler Parameterbereich ist. Mit (1.6.7), (1.6.8) kann man wieder einen Anfangsstreifen

$$\mathcal{S} = \{\vec{x}_0(\vec{\tau}), u_0(\vec{\tau}), \vec{p}_0(\vec{\tau})\} \subset \mathcal{G}$$

aus den impliziten Gleichungen

$$\begin{aligned} F(\vec{x}_0(\vec{\tau}), u_0(\vec{\tau}), \vec{p}_0(\vec{\tau})) &= 0 \text{ und} \\ \sum_{j=1}^n p_{j0} \frac{\partial x_{j0}}{\partial \tau_k} &= \frac{\partial u_0}{\partial \tau_k} \text{ für } k = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

ermitteln, wenn der Anfangsstreifen \mathcal{S} auf \mathcal{M}_{n-1} nicht charakteristisch ist, d.h. für

$$D(0, \tau) := \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{10}}{\partial \tau_1}, \dots, & \frac{\partial x_{10}}{\partial \tau_{n-1}}, & F_{p_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{n0}}{\partial \tau_1}, \dots, & \frac{\partial x_{n0}}{\partial \tau_{n-1}}, & F_{p_n} \end{vmatrix} \Big|_{\mathcal{S}} \neq 0. \quad (1.6.10)$$

Entsprechend Satz 1.5.4 gilt hier:

1.6.1 Satz: Sei $F \in C^2(\mathcal{G})$, $\mathcal{M}_{n-1} \in C^2(\mathcal{T})$. Dann existiert zu jedem nichtcharakteristischen Anfangsstreifen $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ auf \mathcal{M}_{n-1} jeweils genau eine Lösung von (1.6.1), (1.6.8) in Parameterdarstellung in einem geeigneten Bereich $[-S_0, S_0] \times \mathcal{T}$. Diese kann lokal durch $z = u(x_1, \dots, x_n)$ dargestellt werden und ist lokale Lösung $u \in C^1$ von (1.6.1).

Beweis: Die ersten Schritte des Beweises verlaufen völlig analog zum Beweis von Satz 1.5.4. Aus dem Volterraschen Integralgleichungssystem für die Charakteristiken gewinnt man durch die sukzessive Approximation

$$\begin{aligned} X_{i\ell+1}(s, \vec{\tau}) &:= x_{i0}(\vec{\tau}) + \int_{\sigma=0}^s F_{p_i}(X_{1\ell}, \dots, X_{n\ell}, U_\ell, P_{1\ell}, \dots, P_{n\ell}(\sigma, \vec{\tau})) d\sigma, \\ U_{\ell+1}(s, \vec{\tau}) &:= u_0(\vec{\tau}) + \int_{\sigma=0}^s \sum_{j=1}^n P_{j\ell} F_{p_j}(X_{k\ell}, U_\ell, P_{1\ell}, \dots, P_{n\ell}(\sigma, \vec{\tau})) d\sigma, \\ P_{i\ell+1}(s, \vec{\tau}) &:= p_{i0}(\vec{\tau}) - \int_{\sigma=0}^s \{F_{x_i} + P_{i\ell} F_u\}(X_{k\ell}, U_\ell, P_{1\ell}, \dots, P_{n\ell}(\sigma, \vec{\tau})) d\sigma, \\ U_0 &:= u_0, X_{i0} := x_{i0}, P_{i0} := p_{i0}, i = 1, \dots, n; \ell = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

als Grenzwert der gleichmäßig konvergenten Folge in (1.6.11). Die Grenzfunktionen sind einmal stetig differenzierbar und haben darüber hinaus die Differenzierbarkeitseigenschaften $X_{is\tau_k}, U_{s\tau_k}, P_{is\tau_k}, X_{iss}, U_{ss}, P_{iss} \in C^0$. Nach Konstruktion erfüllen sie die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial X_i}{\partial s} = F_{p_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial s} = -F_{x_i} - P_i F_u, \quad \frac{\partial U}{\partial s} = \sum_{j=1}^n P_j F_{p_j}. \quad (1.6.12)$$

Die n Gleichungen

$$\vec{x} = \vec{X}(s, \vec{\tau}) \quad \text{mit } |s| \leq S_0 \quad \text{und } \vec{\tau} \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

kann man lokal wegen $D(0, \vec{\tau}) \neq 0$ nach Voraussetzung (1.6.10) nach $s, \vec{\tau}$ auflösen,

$$\begin{aligned} s &= S(x_1, \dots, x_n), \\ \tau_1 &= T_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \tau_{n-1} &= T_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

und dann in U einsetzen. Man erhält die Lösung in der gewünschten Gestalt aus der Parameterdarstellung:

$$u(\vec{x}) := U(S(\vec{x}), T_1(\vec{x}), \dots, T_{n-1}(\vec{x})).$$

Zu zeigen bleibt noch, daß u die Differentialgleichung erfüllt. Das ist äquivalent zur Gültigkeit der Gleichungen

$$P_i(S(\vec{x}), T_1(\vec{x}), \dots, T_{n-1}(\vec{x})) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \quad (1.6.14)$$

denn nach Konstruktion ist

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, u(\vec{x}), P_i(S(\vec{x}), \dots, T_{n-1}(\vec{x}))) &= F(X_i(s, \vec{\tau}), U(s, \vec{\tau}), P_i(s, \vec{\tau})) \\ &= F(X_i(0, \vec{\tau}), U(0, \vec{\tau}), P_i(0, \vec{\tau})) \\ &= F(x_{i0}(\vec{\tau}), u_0(\vec{\tau}), p_{i0}(\vec{\tau})) = 0 \end{aligned}$$

für $\vec{x} = \vec{X}(s, \vec{\tau})$ und wegen Lemma 1.5.1 erfüllt. Letzteres gilt hier ganz genauso. Um (1.6.14) zu zeigen, betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} W_k(s, \vec{\tau}) &:= U_{\tau_k} - \sum_{j=1}^n P_j X_{j\tau_k} \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1, \\ V(s, \vec{\tau}) &:= U_s - \sum_{j=1}^n P_j X_{js}. \end{aligned} \tag{1.6.15}$$

Dann gelten wegen (1.6.12)

$$\begin{aligned} V(s, \vec{\tau}) &= \sum_{j=1}^n (P_j F_{pj} - P_j F_{pj}) = 0, \\ \frac{\partial W_k}{\partial s} &= U_{\tau_k s} - \sum_{j=1}^n (P_{js} X_{j\tau_k} + P_j X_{j\tau_k s}) \\ &= U_{s\tau_k} - \sum_{j=1}^n (P_j X_{js})_{\tau_k} + \sum_{j=1}^n (P_{j\tau_k} X_{js} - P_{js} X_{j\tau_k}) \end{aligned} \tag{1.6.16}$$

und nach Einsetzen von (1.6.15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k}{\partial s} &= V_{\tau_k} + \sum_{j=1}^n (P_{j\tau_k} F_{pj} + X_{j\tau_k} \{F_{x_j} + P_j F_u\}) \\ &= \sum_{j=1}^n (F_{pj} P_{j\tau_k} + F_{x_j} X_{j\tau_k}) + F_u U_{\tau_k} + F_u \left(\sum_{j=1}^n P_j X_{j\tau_k} - U_{\tau_k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau_k} [F(X_1, \dots, X_n, U, P_1, \dots, P_n)] - F_u \cdot W_k \\ &= -F_u \cdot W_k \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \tag{1.6.17}$$

wobei $F_u = F_u(X_1, \dots, X_n, U, P_1, \dots, P_n)$ als Funktion von s und $\vec{\tau}$ bekannt ist. Wegen (1.6.9) gilt

$$W_k(0) = u_{0\tau_k} - \sum_{j=1}^n p_{j0} \frac{\partial x_{j0}}{\partial \tau_k} = 0.$$

Da entlang den Charakteristiken W_k auch noch die lineare homogene Differentialgleichung (1.6.17) erfüllt, erhalten wir

$$W_k(s, \vec{\tau}) = U_{\tau_k} - \sum_{j=1}^n P_j X_{j\tau_k} \equiv 0.$$

Folglich gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} X_{i\tau_k} &= \frac{\partial U}{\partial \tau_k} = \sum_{i=1}^n P_i X_{i\tau_k} \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1, \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} X_{is} &= \frac{\partial U}{\partial s} = \sum_{i=1}^n P_i X_{is}. \end{aligned}$$

Die Koeffizientendeterminante dieses linearen Gleichungssystems für $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ist gerade die Funktionaldeterminante $D(s, \vec{\tau})$, die dort nicht verschwindet, wo wir (1.6.13) zur Verfügung haben. Deshalb gelten lokal die Gleichungen (1.6.14), was zu zeigen war. \square

Bemerkungen zur korrekten Stellung:

Nach Hadamard nennt man ein Differentialgleichungsproblem **korrekt gestellt**, falls die folgenden drei Eigenschaften gezeigt werden können:

1. Existenz einer Lösung,
2. Eindeutigkeit der Lösung,
3. Stetige Abhängigkeit der Lösung von den gegebenen Daten.

Wie wir bereits gesehen haben, können zu einer einzigen Anfangsbedingung (1.6.8) bei allgemeiner Differentialgleichung (1.6.1) im allgemeinen mehrere Lösungen existieren. Die Abbildung $\{x_{10}, \dots, x_{n0}, u_0\} \mapsto u$ von den Anfangsdaten auf die Lösung ist i.a. also nicht eindeutig definiert.

Wegen der möglichen Mehrdeutigkeit ist das allgemeine Anfangswertproblem zu (1.6.1) demnach i.a. nicht korrekt gestellt. Jedoch gehört zu **jedem Anfangsstreifen**, der nicht charakteristisch ist, **jeweils** genau eine Lösung. Man kann deshalb fragen, ob kleine Änderungen der Anfangsstreifen auch nur kleine Änderungen der Lösung bewirken, d.h. ob die Abbildung von den Anfangsdaten $\{\vec{x}_0, u_0, \vec{p}_0\} \mapsto u \in C^1$ stetig ist. Um dies zu präzisieren, versehen wir für kompaktes \mathcal{T} und $\gamma > 0$ den Funktionenraum

$$\mathcal{X} := \{ \mathcal{S} : \{x_{10}, \dots, x_{n0}, u_0, p_{10}, \dots, p_{n0}\} \in C^1(\mathcal{T}) \wedge |D(0, \vec{\tau})| \geq \gamma > 0 \}$$

mit der durch C^1 induzierten Metrik:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}) := \sum_{i=1}^n \{ \max_{\vec{\tau} \in \mathcal{T}} |x_{i0} - \tilde{x}_{i0}| + \sum_{k=1}^{n-1} (\max_{\vec{\tau} \in \mathcal{T}} |x_{i0\tau_k} - \tilde{x}_{i0\tau_k}| \\ + \dots + \max_{\vec{\tau} \in \mathcal{T}} |p_{i0\tau_k} - \tilde{p}_{i0\tau_k}|) \} . \end{aligned}$$

Des weiteren sei

$$\Omega_u := \{ \vec{x} = \vec{X}(s, \vec{\tau}) \mid |s| \leq S_0, \vec{\tau} \in \mathcal{T} \text{ und } \vec{X} \text{ bijektiv} \} .$$

1.6.2 Satz: Für $\mathcal{S} \in \mathcal{X}$ existiert $S_0 > 0$, so daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, und daß für jedes $\tilde{\mathcal{S}} \in \mathcal{X}$ mit $d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}) \leq \delta$ eine Lösung $\tilde{u}(\vec{x})$ des Anfangswertproblems zum Anfangsstreifen $\tilde{\mathcal{S}}$ existiert, die in Ω_u erklärt ist und für die gilt

$$\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\Omega_u \cap \Omega_{\tilde{u}})} = \max_{\Omega_u \cap \Omega_{\tilde{u}}} |u - \tilde{u}| + \sum_{i=1}^n \max_{\Omega_u \cap \Omega_{\tilde{u}}} |u_{x_i} - \tilde{u}_{x_i}| < \varepsilon .$$

Beweis: Zum Anfangsstreifen $\mathcal{S} = \{\vec{x}_0(\vec{\tau}), u_0(\tau), \vec{p}_0(\vec{\tau})\}$ existiert nach Satz 1.6.1 genau eine Lösung u . Damit ist auch Ω_u für genügend kleines $S_0 > 0$ definiert. Dann muß für jedes $\tilde{\mathcal{S}} \in \mathcal{X}$ mit $d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}) < \delta_0$ mit geeignetem $\delta_0 > 0$ auch \tilde{u} in Ω_u definiert sein. Um das zu sichern, setzen wir \mathcal{S} und $\tilde{\mathcal{S}}$ jeweils in einen etwas größeren kompakten Definitionsbereich $\mathcal{T}_0 \supset \mathcal{T}$ fort und betrachten alle Lösungen zunächst im größeren Parameterbereich \mathcal{T}_0 . Wegen der Definition von \mathcal{X} und der Stetigkeit aller vorkommenden Funktionen bzw. ihrer Ableitungen ist dies nach dem Satz von Tietze–Urysohn möglich. Die Lösung zu \mathcal{S} erfüllt das Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} X_i(s, \vec{\tau}) &= x_{i0}(\vec{\tau}) + \int_0^s F_{p_i}(X_1(\sigma, \vec{\tau}), \dots, P_n(\sigma, \vec{\tau})) d\sigma , \\ U(s, \vec{\tau}) &= u_0(\vec{\tau}) + \int_0^s \left(\sum_{j=1}^n P_j F_{p_j}(X_1(\sigma, \vec{\tau}), \dots, P_n(\sigma, \vec{\tau})) \right) d\sigma , \\ P_i(s, \vec{\tau}) &= p_{i0}(\vec{\tau}) - \int_0^s \left\{ F_{x_i} + P_i F_u(X_1(\sigma, \vec{\tau}), \dots, P_n(\sigma, \vec{\tau})) \right\} d\sigma , \\ X_{i\tau_k}(s, \vec{\tau}) &= x_{i0\tau_k}(\vec{\tau}) + \int_0^s \left(\sum_{\ell=1}^n F_{p_i x_\ell} X_{\ell\tau_k} + F_{p_i u} U_{\tau_k} + \sum_{\ell=1}^n F_{p_i p_\ell} P_{\ell\tau_k} \right) d\sigma , \\ U_{\tau_k}(s, \vec{\tau}) &= u_{0\tau_k}(\vec{\tau}) + \int_0^s \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^n P_j F_{p_j x_\ell} X_{\ell\tau_k} + P_j F_{p_j u} U_{\tau_k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\ell=1}^n (P_j F_{p_j})_{p_\ell} P_{\ell\tau_k} \right) \right) d\sigma , \\ P_{i\tau_k}(s, \vec{\tau}) &= p_{i0\tau_k}(\vec{\tau}) - \int_0^s \left(\sum_{\ell=1}^n \left\{ \dots \right\}_{x_\ell} X_{\ell\tau_k} + \left\{ \dots \right\}_u U_{\tau_k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^n \left\{ \dots \right\}_{p_\ell} P_{\ell\tau_k} \right) d\sigma \end{aligned}$$

und die Lösung zu $\tilde{\mathcal{S}}$ das entsprechende Gleichungssystem für \tilde{X}_i mit $\tilde{x}_{i0}(\vec{\tau})$ etc.

Für die Differenzen bekommen wir also Abschätzungen der Gestalt

$$\begin{aligned}
|X_i(s, \vec{\tau}) - \tilde{X}_i(s, \vec{\tau})| &\leq |x_{i0}(\vec{\tau}) - \tilde{x}_{i0}(\vec{\tau})| \\
&+ \int_0^s \left| F_{p_i}(X_i(\sigma, \vec{\tau}), \dots) - F_{p_i}(\tilde{X}_i(\sigma, \vec{\tau}), \dots) \right| d\sigma, \\
&\vdots \\
|P_{i\tau_k}(s, \vec{\tau}) - \tilde{P}_{i\tau_k}(s, \vec{\tau})| &\leq |P_{i0\tau_k}(\vec{\tau}) - \tilde{P}_{i0\tau_k}(\vec{\tau})| \\
&+ \int_0^s \left\{ \sum_{\ell=1}^n |F_{x_i x_\ell}(X_1(\sigma, \vec{\tau}), \dots) - F_{x_i x_\ell}(\tilde{X}_1(\sigma, \vec{\tau}), \dots)| |X_{\ell\tau_k}| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\ell=1}^n |F_{x_i x_\ell}(\tilde{X}_1(\sigma, \vec{\tau}), \dots)| |X_{\ell\tau_k} - \tilde{X}_{\ell\tau_k}| + \dots \right\} d\sigma.
\end{aligned}$$

Für die Ableitungen nach s bekommen wir außerdem

$$|X_{is} - \tilde{X}_{is}| \leq |F_{p_i}(X_i(s, \vec{\tau}), \dots) - F_{p_i}(\tilde{X}_i(s, \vec{\tau}), \dots)|$$

und entsprechende Ungleichungen für $|U_s - \tilde{U}_s|$ und $|P_{is} - \tilde{P}_{is}|$. Für $|s| \leq S_0$ liefert dann die Lipschitzbedingung für die Ableitungen von F eine Abschätzung der Gestalt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n |X_i - \tilde{X}_i| + |X_{i\tau_k} - \tilde{X}_{i\tau_k}| + |X_{is} - \tilde{X}_{is}| + \dots + \sum_{i=1}^n |P_{is} - \tilde{P}_{is}| \\
&\leq C(u) \cdot S_0 \left\{ \sum_{i=1}^n \|X_i - \tilde{X}_i\|_{C^1} + \|U - \tilde{U}\|_{C^1} + \sum_{i=1}^n \|P_i - \tilde{P}_i\|_{C^1} \right\} \\
&\quad + d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}})
\end{aligned}$$

in $[-S_0, S_0] \times \mathcal{T}_0$. Wählt man nun S_0 klein genug, etwa $S_0 = \frac{1}{2}C(u)^{-1}$, so erhält man

$$\sum_{i=1}^n \{ \|X_i - \tilde{X}_i\|_{C^1} + \|P_i - \tilde{P}_i\|_{C^1} \} + \|U - \tilde{U}\|_{C^1} \leq \tilde{C}(u, S_0) d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}).$$

Nun fehlt noch der Übergang zu den Koordinaten \vec{x} . Wir haben die i.a. verschiedenen Transformationen

$$\begin{aligned}
x_i = X_i(s, \vec{\tau}) \quad \text{und} \quad s = S(\vec{x}), \tau_k = T_k(\vec{x}) \quad \text{bzw.} \\
x_i = \tilde{X}_i(s, \vec{\tau}) \quad \text{und} \quad s = \tilde{S}(\vec{x}), \tau_k = \tilde{T}_k(\vec{x}).
\end{aligned}$$

Folglich erhält man

$$\begin{aligned}
|S(\vec{x}) - \tilde{S}(\vec{x})| &= |S(\vec{X}(S(\vec{x}), \vec{T}(\vec{x}))) - S(\vec{X}(\tilde{S}(\vec{x}), \tilde{T}(\vec{x})))| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial S}{\partial x_i}(\vec{X}(S, T) - \vec{X}(\tilde{S}, \tilde{T})) \right|.
\end{aligned}$$

Nun gilt für die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(S, \vec{T})}{\partial \vec{x}} = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial(s, \vec{\tau})} \right)^{-1},$$

also schließlich für genügend kleines $S_0 > 0$:

$$|S(\vec{x}) - \tilde{S}(\vec{x})| \leq M \|\vec{X} - \tilde{X}\|_{C^0} \leq \tilde{M}(u, S_0) d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}})$$

und die entsprechende Abschätzung für $|\vec{T}(\vec{x}) - \tilde{\vec{T}}(\vec{x})|$. Also erhalten wir für die gesuchten Lösungen schließlich

$$\begin{aligned} |u(\vec{x}) - \tilde{u}(\vec{x})| &= |U(S(\vec{x}), \vec{T}(\vec{x})) - \tilde{U}(\tilde{S}(\vec{x}), \tilde{\vec{T}}(\vec{x}))| \\ &\leq |U_s| |S(\vec{x}) - \tilde{S}(\vec{x})| + |U_\tau| |\vec{T}(\vec{x}) - \tilde{\vec{T}}(\vec{x})| \\ &\quad + |U(\tilde{S}(\vec{x}), \tilde{\vec{T}}(\vec{x})) - \tilde{U}(\tilde{S}(\vec{x}), \tilde{\vec{T}}(\vec{x}))| \\ &\leq c(u) d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}). \end{aligned}$$

Für die ersten Ableitungen in der Jacobi-Matrix gehen wir ganz entsprechend vor, indem wir die Kettenregel verwenden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(S, \vec{T})}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial(\tilde{S}, \tilde{\vec{T}})}{\partial \vec{x}} &= \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial(s, \vec{\tau})}(S, \vec{T}) \right)^{-1} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial(s, \vec{\tau})}(\tilde{S}, \tilde{\vec{T}}) \right)^{-1} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial(s, \vec{\tau})}(\tilde{S}, \tilde{\vec{T}}) \right)^{-1} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial(s, \vec{\tau})}(\tilde{S}, \tilde{\vec{T}}) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Also erhalten wir Abschätzungen der Gestalt

$$|S_{x_i} - \tilde{S}_{x_i}| + |T_{kx_i} - \tilde{T}_{kx_i}| \leq c(u) d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}).$$

Damit bekommen wir auch für die ersten Ableitungen aus

$$u_{x_i} - \tilde{u}_{x_i} = U_s S_{x_i} + \sum_{k=1}^{n-1} U_{\tau_k} T_{kx_i} - \tilde{U}_s \tilde{S}_{x_i} - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{U}_{\tau_k} \tilde{T}_{kx_i}$$

die Ungleichung

$$\begin{aligned} |u_{x_i} - \tilde{u}_{x_i}| &\leq |(U_s - \tilde{U}_s) \tilde{S}_{x_i}| + |U_s (S_{x_i} - \tilde{S}_{x_i})| + \cdots + \sum_{k=1}^{n-1} |U_{\tau_k} (T_{kx_i} - \tilde{T}_{kx_i})| \\ &\leq c(u) d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\Omega_u)} \leq c(u) d(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}})$$

mit einer geeigneten neuen Konstanten $c(u)$. □

Aufgabe 19: Man bestimme die Lösung von

$$u_x^2 + u_y^2 - zu_z^2 = u$$

mit

$$u(x, y, 0) = x^2 + y^2$$

mit Hilfe des Grenzübergangs $\varepsilon \rightarrow 0$ als Grenzwert von u_ε aus

$$u_\varepsilon(x, y, \varepsilon) = x^2 + y^2 .$$

1.7 Singuläre Lösung und vollständiges Integral

1.7.1 Singuläres Gebilde und singuläre Lösung

Für (1.6.1) hatten wir das singuläre Gebilde Σ nach (1.6.6) durch $\{\vec{x}, u, \vec{p}\}$ mit

$$F_{p_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad (1.7.1)$$

definiert. Falls auf Σ noch *zusätzlich*

$$F_u \neq 0 \quad \text{und} \quad \text{Det}((F_{p_j p_k}))_{n \times n} \neq 0 \quad (1.7.2)$$

gelten, so kann man (1.7.1) und $F = 0$ auflösen und erhält $u = u(\vec{x})$, $p_j = p_j(\vec{x})$ für $j = 1, \dots, n$, d.h. eine **Mannigfaltigkeit** $\mathcal{M}_n \subset \Sigma$.

Definition: \mathcal{M}_n heißt **singuläre Lösung** genau dann, wenn gilt:

$$u_{x_i|_{\mathcal{M}_n}} = p_{i|_{\mathcal{M}_n}} \quad \text{für } i = 1, \dots, n . \quad (1.7.3)$$

Dies sind *nochmals* n Gleichungen. Die Gleichungen (1.7.1), (1.7.3) bedeuten für die singuläre Lösung also $2n+1$ Bedingungen, d.h. das System ist im allgemeinen Fall stark überbestimmt.

1.7.1 Beispiel: Als Beispiel betrachten wir eine Clairautsche Differentialgleichung

$$x \cdot p + y \cdot q + f(p, q) - u = 0 ,$$

nämlich die spezielle Gleichung

$$F \equiv px + qy + p^3 + q^3 - u = 0 .$$

Aus

$$F_p = x + 3q^2 = 0 , F_q = y + 3p^2 = 0$$

ergeben sich auf \mathcal{M}_2 die Beziehungen

$$p = \pm \sqrt{-\frac{x}{3}} , q = \pm \sqrt{-\frac{y}{3}}$$

und

$$u = \pm \left\{ x \sqrt{-\frac{x}{3}} \pm y \sqrt{-\frac{y}{3}} - \frac{x}{3} \sqrt{-\frac{x}{3}} \pm \left(-\frac{y}{3} \sqrt{-\frac{x}{3}} \right) \right\} .$$

u, p, q definieren außer im Nullpunkt eine singuläre Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_2 . Außerdem gelten

$$u_x = \pm \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{-\frac{x}{3}} + \frac{1}{3} \sqrt{-\frac{x}{3}} \right\} = \pm \sqrt{-\frac{x}{3}} = p , u_y = \pm \sqrt{-\frac{y}{3}} = q$$

auf \mathcal{M}_2 . Hier ist u also singuläre Lösung !

1.7.2 Vollständiges Integral

Definition: $\varphi(\vec{x}, \vec{a})$ heißt **vollständiges Integral**, falls für alle $(\vec{x}, \vec{a}) \in \mathcal{B}$ in einem geeigneten Gebiet $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{2n}$ die Differentialgleichung

$$F(\vec{x}, \varphi, \nabla_x \varphi) = 0 \quad (1.7.4)$$

sowie die Bedingung

$$\text{Rang} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_j}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_j \partial x_\ell} \right) \right)_{j,\ell=1,\dots,n} = n \quad (1.7.5)$$

erfüllt werden.

1.7.2 Satz: *Im regulären Bereich ist jede Enveloppe vollständiger Integrale eine Lösung.*

Beweis: Zur Enveloppenbildung betrachten wir eine einparametrische Schar, d.h. die Parameter \vec{a} sind z.B. durch Beziehungen

$$\vec{a} = \vec{\psi}(\sigma)$$

für ein vorgegebenes Parameterintervall mit

$$\sigma \in (\sigma_0, \sigma_1) \subset \mathbb{R}$$

gebunden. Dann lautet die Enveloppenbedingung

$$\frac{d}{d\sigma} [\varphi(\vec{x}, \vec{\psi}(\sigma))] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial a_j} \frac{d\psi_j}{d\sigma} = 0 \quad (1.7.6)$$

für die zugehörige Schar von Lösungen

$$U(\vec{x}; \sigma) = \varphi(\vec{x}, \vec{\psi}(\sigma)).$$

Löst man (1.7.6) nach $\sigma = \sigma(\vec{x})$ auf und setzt dies in das vollständige Integral ein, so erhält man die Enveloppenlösung

$$u(\vec{x}) := \varphi(\vec{x}, \vec{\psi}(\sigma(\vec{x}))). \quad (1.7.7)$$

Nachzuprüfen ist, ob u die Differentialgleichung erfüllt. Dazu berechnen wir

$$u_{x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial a_\ell} \frac{d\psi_\ell}{d\sigma}.$$

Die Summe verschwindet wegen der Enveloppenbedingung (1.7.6), und wir erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

Folglich ist

$$F(\vec{x}, u, \nabla u) = F(\vec{x}, \varphi(\vec{x}, \vec{\psi}(\sigma(\vec{x}))), \nabla_x \varphi(\vec{x}, \vec{\psi}(\sigma(\vec{x})))) = 0$$

erfüllt, weil die Differentialgleichung (1.7.4) für φ für **alle** \vec{x} und **alle** \vec{a} erfüllt ist. \square

1.7.3 Lemma: Der Berührstreifen zwischen vollständigem Integral (bei festen a_1, \dots, a_n) und einer Enveloppe ist im regulären Bereich Integralstreifen.

Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

1.7.4 Lemma: Jede Lösung des nicht-charakteristischen Anfangswertproblems läßt sich im regulären Bereich als Enveloppe des vollständigen Integrals entlang des Anfangsstreifens \mathcal{S} gewinnen, falls dort die zusätzliche Bedingung

$$\sum_{j,k=1}^n \varphi_{a_j a_k} \frac{d(a_j|_{\mathcal{S}})}{d\tau} \frac{d(a_k|_{\mathcal{S}})}{d\tau} + \sum_{j=1}^n \varphi_{a_j} \frac{d^2(a_j|_{\mathcal{S}})}{d\tau^2} \neq 0 \quad (1.7.8)$$

erfüllt ist.

Beweis: Wir führen den Beweis für $n = 2$; er läßt sich ohne Schwierigkeiten auf $n > 2$ übertragen. Gegeben sind eine Lösung $u(x, y)$ des Anfangswertproblems (1.5.1), (1.5.10) und ein vollständiges Integral $\varphi(x, y, a, b)$, das (1.7.5) mit $n = 2$ erfüllt. Wir verschaffen uns zunächst eine einparametrische Schar von Lösungen durch den Anfangsstreifen. Dazu setzen wir voraus:

$$\begin{vmatrix} \varphi_a & \varphi_b \\ \varphi_{ax} & \varphi_{bx} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.7.9)$$

Wäre diese Determinante und zugleich $\begin{vmatrix} \varphi_a & \varphi_b \\ \varphi_{ay} & \varphi_{by} \end{vmatrix}$ Null, so würde auch

$\begin{vmatrix} \varphi_{ax} & \varphi_{bx} \\ \varphi_{ay} & \varphi_{by} \end{vmatrix}$ verschwinden, was (1.7.5) widerspräche. Unter Voraussetzung (1.7.9) ist deshalb das System von Gleichungen

$$u_0(\tau) = \varphi(x_0(\tau), y_0(\tau), a, b), \quad p_0(\tau) = \varphi_x(x_0(\tau), y_0(\tau), a, b) \quad (1.7.10)$$

lokal auflösbar nach $a = a(\tau)$, $b = b(\tau)$. Diese Funktionen setzen wir in die Enveloppenbedingung (1.7.6) ein und erhalten auf \mathcal{S} die Gleichung

$$\Phi(x, y, \tau) := \varphi_a(x, y, a(\tau), b(\tau))\dot{a}(\tau) + \varphi_b(x, y, a(\tau), b(\tau))\dot{b}(\tau) = 0. \quad (1.7.11)$$

Diese Gleichung kann unter der Voraussetzung

$$\frac{d\Phi}{d\tau}|_{\mathcal{S}} = \{\varphi_{aa}\dot{a}^2 + 2\varphi_{ab}\dot{a}\dot{b} + \varphi_{bb}\dot{b}^2 + \varphi_a\ddot{a} + \varphi_b\ddot{b}\}|_{\mathcal{S}} \neq 0 \quad (1.7.12)$$

lokal nach $\tau = \tau(x, y)$ aufgelöst werden. Damit erhält man aufgrund Satz 1.7.2 eine Lösung

$$v(x, y) := \varphi(x, y, a(\tau(x, y)), b(\tau(x, y)))$$

der Differentialgleichung (1.5.1). Außerdem gilt wegen (1.7.10) mit (1.7.11)

$$\dot{u}_0 = p_0\dot{x}_0 + q_0\dot{y}_0 = \varphi_x\dot{x}_0 + \varphi_y\dot{y}_0 + \varphi_a\dot{a} + \varphi_b\dot{b} = p_0\dot{x}_0 + \varphi_y\dot{y}_0.$$

Falls $\dot{y}_0 \neq 0$, folgt hieraus $q_0(\tau) = \varphi_y(x_0(\tau), y_0(\tau), a(\tau), b(\tau))$. Ist $\dot{y}_0 = 0$, so erhält man die gleiche Anfangsbedingung $q_0 = \varphi_y$ aus den Gleichungen $p_0 = \varphi_x$, $F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = 0$ und $F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0$. Demnach sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ zwei Lösungen von (1.5.1) zum gleichen Anfangsstreifen $x_0, y_0, v|_S = u_0, v_x|_S = p_0, v_y|_S = q_0$. Folglich sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ nach Satz 1.5.4 identisch. \square

1.7.5 Beispiel: Für die Clairautsche Differentialgleichung

$$F = xp + yq + p^3 + q^3 - u = 0$$

ergibt sich als Lösungsschar immer auch eine Schar von Ebenen:

$$\varphi(x, y, a, b) = ax + by + a^3 + b^3.$$

Diese Lösungsschar φ erweist sich als vollständiges Integral, denn

$$\begin{pmatrix} \varphi_a & \varphi_{ax} & \varphi_{ay} \\ \varphi_b & \varphi_{bx} & \varphi_{by} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3a^2 & 1 & 0 \\ x + 3b^2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und der Rang dieser Matrix ist 2. \square

Aufgabe 20: Zur Differentialgleichung

$$F \equiv px + qy + p^2 + q^2 - u = 0$$

bestimme man ein vollständiges Integral, die singulären Lösungen und alle Lösungen durch

$$u(x, 0) = -\frac{x^2}{4}.$$

Aufgabe 21: Man beweise Lemma 1.7.3.

1.8 Bemerkungen zur Transport- und Eikonalgleichung

Sowohl die Eikonal- als auch die Transportgleichung kommen in vielen Anwendungen vor. Wir wollen hier ihren *formalen* Zusammenhang zur Optik bzw. der Neutronentransportgleichung herstellen (s.a. [93]).

1.8.1 Eikonalgleichung und Wellenoptik

Für zeitharmonische Schwingungen können Wellenausbreitungen mit Hilfe des Produktansatzes auf die **Helmholtzsche Differentialgleichung**

$$(\Delta + k^2 \vec{n}^2(\vec{x}))v(\vec{x}, k) = 0 \tag{1.8.1}$$

reduziert werden, wobei Δ den Laplace-Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha}^2}$, k die Wellenzahl und $c(x) = \frac{1}{|\vec{n}(x)|}$ die lokale Wellengeschwindigkeit bezeichnen. Für $v(\vec{x}, k)$ macht man den **asymptotischen Ansatz** für große Wellenzahlen bzw. Frequenzen,

$$v(\vec{x}, k) = \exp(ik\phi(\vec{x})) \sum_{\ell=0}^{\infty} Z_{\ell}(\vec{x})(ik)^{-\ell}. \quad (1.8.2)$$

Das soll heißen, daß man für jedes $L \in \mathbb{N}$ verlangt, daß für große k eine Abschätzung der Gestalt

$$|v(\vec{x}, k) - \sum_{\ell=0}^L \exp(ik\phi(\vec{x})) Z_{\ell}(\vec{x})(ik)^{-\ell}| \leq C_L(\vec{x}) k^{-L-1} \quad (1.8.3)$$

mit einer von k unabhängigen Konstante $C_L(\vec{x})$ gilt. Um (1.8.2) in (1.8.1) einzusetzen, bilden wir

$$\frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} = \phi_{x_{\alpha}} \exp(ik\phi) \sum_{\ell=0}^{\infty} (ik)^{-\ell+1} Z_{\ell}(x) + \exp(ik\phi) \sum_{\ell=0}^{\infty} (ik)^{\ell} Z_{\ell x_{\alpha}}(\vec{x})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\alpha}^2} &= \phi_{x_{\alpha} x_{\alpha}} \exp(ik\phi) \left\{ ik Z_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} (ik)^{-\ell+1} Z_{\ell+1} \right\} \\ &\quad - k^2 \phi_{x_{\alpha}}^2 \exp(ik\phi) \sum_{\ell=0}^{\infty} (ik)^{\ell} Z_{\ell} \\ &\quad - 2\phi_{x_{\alpha}} \exp(ik\phi) \left\{ ik Z_{0x_{\alpha}} + \sum_{\ell=0}^{\infty} (ik)^{\ell} Z_{(\ell+1)x_{\alpha}} \right\} \\ &\quad + \exp(ik\phi) \sum_{\ell=0}^{\infty} (ik)^{-\ell} Z_{\ell x_{\alpha} x_{\alpha}}. \end{aligned}$$

Formales Einsetzen in (1.8.1) liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} \exp(ik\phi) \left\{ k^2 (\vec{n}^2(\vec{x}) - \sum_{\alpha=1}^n \phi_{x_{\alpha}}^2) \sum_{\ell=0}^{\infty} Z_{-\ell}(\vec{x})(ik)^{-\ell} + \Delta \phi ik Z_0 \right. \\ \left. + 2ik \sum_{\alpha=1}^n \phi_{x_{\alpha}} Z_{0x_{\alpha}} + \sum_{\ell=0}^{\infty} (ik)^{-\ell} (\Delta \phi Z_{\ell+1} + 2 \sum_{\alpha=1}^n \phi_{x_{\alpha}} Z_{(\ell+1)x_{\alpha}} + \Delta Z_{\ell}) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich nach Potenzen von k erhalten wir zunächst für die **Phasenfunktion** ϕ die **Eikonalgleichung**

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi - \vec{n}^2(x) = 0. \quad (1.8.4)$$

Wenn eine Lösung von (1.8.4) bekannt ist, verlangt man für die Evolution der **Amplitude** die **Transportgleichungen**

$$2\nabla \phi \cdot \nabla Z_0 + (\Delta \phi) Z_0 = 0, \quad (1.8.5)$$

$$2\nabla \phi \cdot \nabla Z_{\ell} + (\Delta \phi) Z_{\ell} = -\Delta Z_{\ell-1} \quad \text{für } \ell = 1, 2, \dots. \quad (1.8.6)$$

Diese Gleichungen kann man unter geeigneten Anfangsbedingungen rekursiv lösen. (1.8.3) kann nur asymptotisch gefordert werden, denn $C_\ell \rightarrow \infty$ für $\ell \rightarrow \infty$ ist erlaubt; zudem werden in (1.8.6) immer höhere Ableitungen der vorhergehenden Entwicklungsfunktionen Z_0, Z_1, \dots erzwungen.

Die Rechtfertigung o.g. asymptotischer Entwicklung ist eine schwierige mathematische Aufgabe, die erst in allerjüngster Zeit zu Ergebnissen für $L = 0$ geführt hat. Siehe dazu etwa [2, 6, 9, 28, 57, 63, 93, 97, 114] .

1.8.2 Boltzmannsche Transportgleichung

Die Boltzmannsche Transportgleichung beschreibt u.a. chemische Reaktoren und Nuklear-Reaktoren [105] .

Bezeichnet $F dx d\omega$ die Anzahl der Moleküle zur Zeit t mit Mittelpunkten zwischen \vec{x} und $\vec{x} + \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} d\vec{x}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ und eine Geschwindigkeit zwischen \vec{v} und $\vec{v} + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} d\omega$, dann erfüllt die sogenannte **Maxwellsche Fundamentalfunktion** $F(t, \vec{x}, \vec{v})$ die **Boltzmann-Gleichung** [6, 28, 62] ,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x F = J(F, F) \quad (1.8.7)$$

mit dem „Stoßterm“

$$\begin{aligned} J(F, F) &= \int_{\mathbb{R}_3} \int_{|\vec{\omega}=1} \mathcal{K}(\vec{\omega} \cdot (\vec{v} - \vec{w}), |\vec{v} - \vec{w}|) \\ &\quad \times \{F(t, \vec{x}, \vec{v} + t\vec{\omega})F(t, \vec{x}, \vec{w} + t\vec{\omega}) - F(t, \vec{x}, \vec{v})F(t, \vec{x}, \vec{w})\} d\omega d\vec{w} \\ &=: Q(F, F) - FR(F). \end{aligned}$$

Zur Lösung der Transportgleichungen (1.8.7) benutzt man die beiden (formalen) Iterationsverfahren:

Carleman-Iteration (1920):

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x F_{n+1} + F_{n+1} R(F_n) = Q(F_n, F_n); \quad (1.8.8)$$

Grad-Iteration (1962):

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x F_{n+1} = J(F_n, F_n) \quad \text{für } n = 0, 1, \dots \quad (1.8.9)$$

Beides sind lineare Transportgleichungen der Gestalt (1.4.9), die für alle Geschwindigkeiten \vec{v} gelöst werden müssen. Dies bedeutet einen enormen Aufwand.

Über den Zusammenhang mit (1.8.7), insbesondere für $n \rightarrow \infty$, gibt es bisher nur Ergebnisse unter sehr starken Einschränkungen; globale Aussagen sind bislang noch nicht bekannt.

1.9 Unstetige Lösungen und Stöße

(Siehe zu diesem Abschnitt auch [70, 116, 128, 129] .) In den vorangegangenen Kapiteln haben wir gesehen, daß die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems für eine Gleichung erster Ordnung im Kleinen mit Hilfe des Charakteristiken-Verfahrens immer konstruiert werden kann. In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß für eine glatte Lösung die Beschränkung auf eine kleine Umgebung der Anfangskurve bei nichtlinearen Problemen im allgemeinen notwendig ist. In größeren Bereichen **muß** die Lösung bei vielen Problemen unstetig werden. Damit erhebt sich sofort die Frage nach einer sinnvollen Erweiterung des Lösungsbegriffes zu **schwachen** Lösungen. Bei einer Erhaltungsgleichung erlaubt die schwache Lösung jedoch zu viele Möglichkeiten von Unstetigkeiten, und im Gegensatz zur glatten lokalen Lösung können nun zu einem Anfangsstreifen beliebig viele unstetige schwache globale Lösungen existieren. Man muß sich hier deshalb auf den physikalischen Ursprung der Transport- bzw. Erhaltungsgleichungen besinnen und mit der sogenannten Entropiebedingung für die schwachen Lösungen ein zusätzliches Auswahlprinzip einführen, um die physikalisch sinnvolle unstetige Lösung aus der Vielfalt der schwachen Lösungen auszusondern.

Wir beginnen zunächst mit der Betrachtung schwacher Störungen.

Definition: Eine Lösung $u(\vec{x})$ von (1.5.1) heißt **schwach unstetig** oder C^1 -**unstetig**, falls $u(\vec{x})$ stückweise einmal stetig differenzierbar und stetig ist.

Denken wir uns die stetig differenzierbaren Teile der Lösung jeweils zu stetig differenzierbaren Lösungen fortgesetzt, so kann man schwach unstetige Lösungen als Überschneidung glatter Lösung deuten (siehe Bild 15).

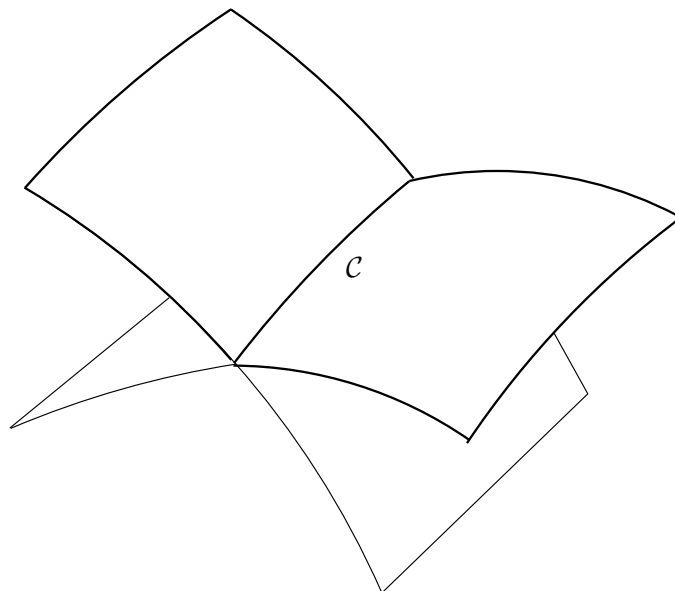


Bild 15: Schwach unstetige Lösung

Mit Lemma 1.3.5 erhalten wir

1.9.1 Lemma: Schwache Unstetigkeiten von Lösungen einer quasilinearen Differentialgleichung erster Ordnung pflanzen sich entlang Charakteristiken fort.

Im Folgenden wollen wir eine Transportgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}_x[\vec{Q}(u)] = H \quad (1.9.1)$$

bzw. für $H = 0$ eine Erhaltungsgleichung (1.9.1) betrachten.

Für eine Raumdimension mit $x \in \mathbb{R}$ lautet die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Q(u) = 0. \quad (1.9.2)$$

Die gegebene Funktion $Q(u)$ nennt man auch **Flussfunktion**. Die Charakteristiken zu (1.9.2) sind durch die Lösungen von

$$Y' = 1, X' = \frac{dQ}{du}(U) =: c(U), U' = 0 \quad (1.9.3)$$

gegeben – wir setzen im folgenden $y = t$. Die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_0(x) = f(x) \quad (1.9.4)$$

lautet in Parameterdarstellung

$$x_0 = \tau, y_0 = 0, u_0 = f(\tau),$$

und die zugehörige Lösung in Parameterdarstellung lautet

$$X = \tau + s \cdot c(f(\tau)), Y = s, U = f(\tau). \quad (1.9.5)$$

Solange also

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial X}{\partial \tau} \\ \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c(f(\tau)) & \left(1 + s \cdot \frac{d^2 Q}{du^2} \cdot \frac{df}{d\tau}\right) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1.9.6)$$

d.h.

$$s \neq -1 \left/ \left(\frac{d^2 Q}{du^2}(f(\tau)) \cdot \frac{df}{d\tau}(\tau) \right) \right.$$

gilt, können wir s und τ lokal eliminieren,

$$s = y, \tau = T(x,y), u(x,y) = f(T(x,y)). \quad (1.9.7)$$

Da die Charakteristiken für die Transportgleichung (1.9.2) Geraden sind, läßt sich die Lösung auch graphisch leicht ermitteln.

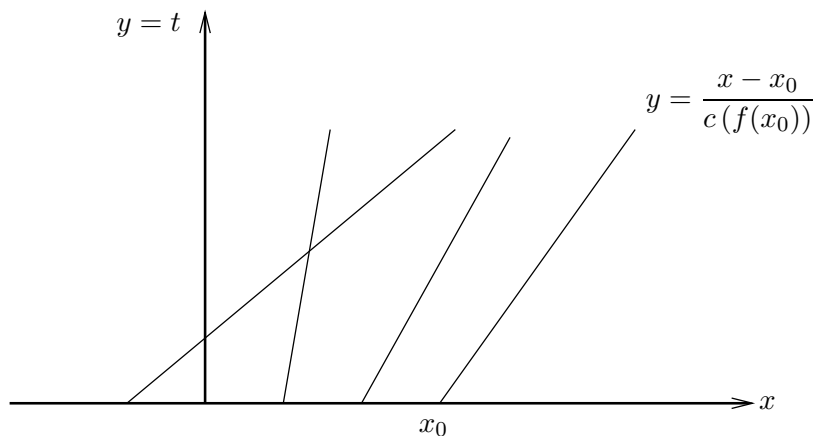


Bild 16: Charakteristiken $y = (x - x_0)/c(f(x_0))$ zur Transportgleichung

Für das Folgende setzen wir voraus, daß die Flußfunktion **streng konvex** ist, d.h.

$$\frac{d^2 Q}{du^2} = \frac{dc}{du} > 0. \quad (1.9.8)$$

a) Monoton wachsende Anfangswerte mit $\frac{df}{d\tau} \geq 0$:

Interpretieren wir y als Zeitvariable und beschränken uns auf $s = y \geq 0$, so erfüllt die Funktionaldeterminante D in (1.9.6) die Ungleichung

$$D = -\left(1 + y \frac{dc}{du} \frac{df}{d\tau}\right) \leq -1.$$

Für jedes $y \geq 0$ ist also $x = \tau + y \cdot c(f(\tau))$ eine streng monoton fallende Funktion von τ , die deshalb **global** invertiert werden kann, d.h. $\tau = T(x, y)$, $s = y$ existieren für alle $y \geq 0$. Die Lösung

$$u(x, y) = f(T(x, y)),$$

eine **Verdünnungswelle**, existiert global für $y \geq 0$. Mit Hilfe des graphischen Charakteristikenverfahrens können wir uns leicht klarmachen, daß die Verdünnungswelle nach rechts wandert und immer flacher wird.

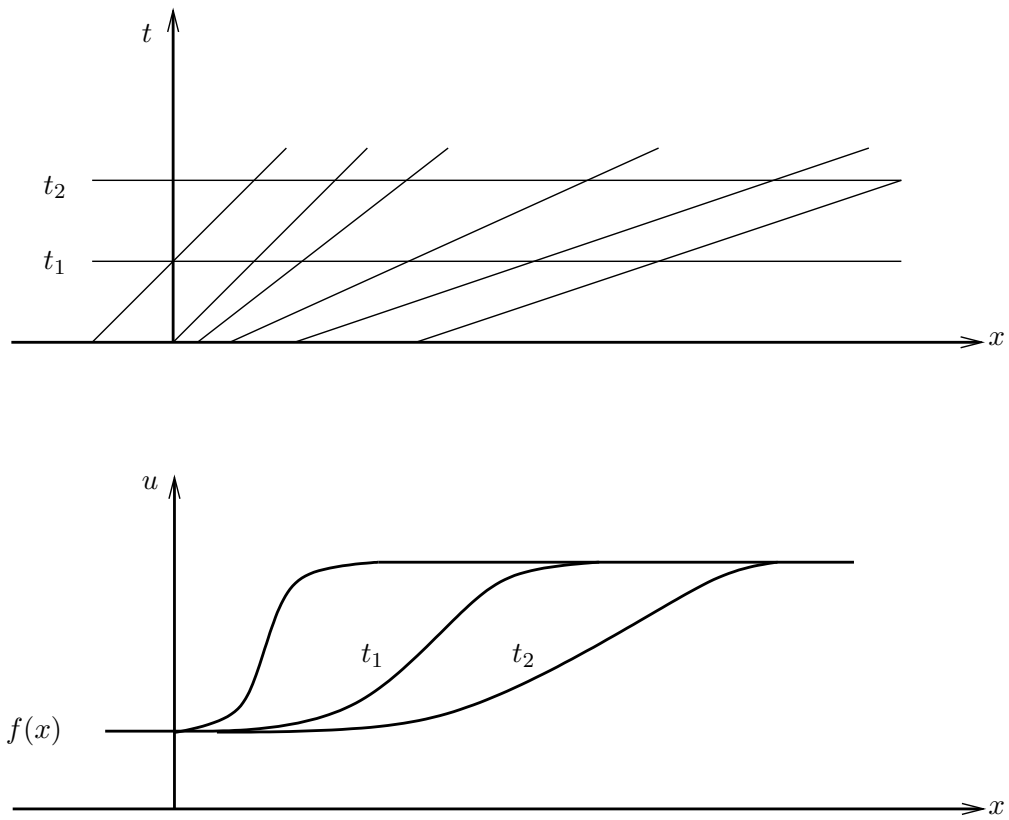


Bild 17: Graphisches Charakteristikenverfahren für eine Verdünnungswelle

Lassen wir den Anstieg von f immer steiler werden, bis f stückweise konstant wird, so erhalten wir als Grenzfall den sogenannten **Verdünnungsfächer**.

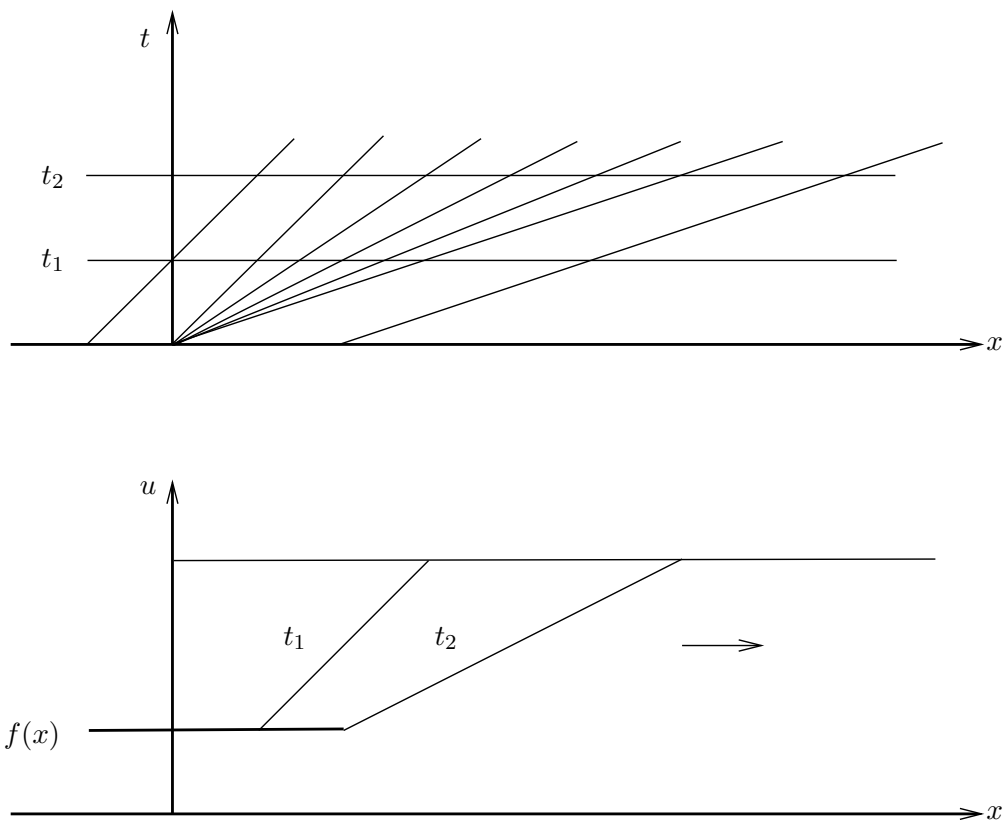


Bild 18: Verdünnungsfächer

Dieses Anfangswertproblem mit $f_0 < f_1$ und

$$f(\tau) = \begin{cases} f_0 & \text{für } \tau \leq 0, \\ f_1 & \text{für } \tau > 0 \end{cases} \quad (1.9.9)$$

nennt man auch das **Riemann-Problem**. Die Lösung des Riemann-Problems als Verdünnungswelle ist entlang den entsprechenden charakteristischen Geraden durch den Nullpunkt der x - y -Ebene konstant, sie kann deshalb als **Ähnlichkeitslösung** der Gestalt

$$u(x, y) = v\left(\frac{x}{y}\right) = v(\xi) \quad (1.9.10)$$

mit $\xi = \frac{x}{y}$ für $y > 0$ angesetzt werden. Einsetzen in (1.9.2) liefert aus

$$-v' \cdot \frac{x}{y^2} + Q'(v) \cdot v' \cdot \frac{1}{y} = 0$$

die Gleichung

$$Q'(v(\xi)) = c(v(\xi)) = \xi,$$

woraus sich mit der zu c inversen Funktion c^{-1} ergibt:

$$v(\xi) = c^{-1}(\xi). \quad (1.9.11)$$

Damit erhalten wir die C^1 -unstetige Lösung

$$u(x,y) = \begin{cases} f_0 & \text{für } x \leq y \cdot c(f_0), \\ c^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } y \cdot c(f_0) < x < y \cdot c(f_1), \\ f_1 & \text{für } y \cdot c(f_1) < x \end{cases} \quad (1.9.12)$$

für $y > 0$. Für $x \neq 0$ ist sie auch noch für $y \rightarrow 0+$ stetig und erfüllt dort die gewünschte Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} f_0 & \text{für } x < 0, \\ f_1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

b) Monoton fallende Anfangswerte mit $\frac{df}{d\tau} < 0$:

Existiert das Minimum

$$\begin{aligned} y^* &= \min_{\tau \in \mathbb{R}} \left\{ -1 \left/ \left(\frac{dc}{du}(f(\tau)) \cdot \frac{df}{d\tau}(\tau) \right) \right\} \\ &= -1 \left/ \left(\frac{dc}{du}(f(\tau^*)) \cdot \frac{df}{d\tau}(\tau^*) \right) \right. > 0, \end{aligned} \quad (1.9.13)$$

so wird zur sogenannten „Blow up“-Zeit y^* die Auflösbarkeitsbedingung (1.9.6) das erste Mal verletzt. Die nach rechts wandernde Welle ist eine **Verdichtungswelle**, und für $y > y^*$ stellen wir bei Durchführen des graphischen Charakteristikenverfahrens **Überrollen** fest.

Hier hüllt die Charakteristikenschar eine Kurve ein, und diese Enveloppe genügt den Gleichungen

$$y_e(\tau) = \frac{-1}{\frac{dc}{du}(f(\tau)) \frac{df}{d\tau}(\tau)}, \quad x_e(\tau) = \tau - \frac{c(f(\tau))}{\frac{dc}{du}(f(\tau)) \frac{df}{d\tau}(\tau)}. \quad (1.9.14)$$

Sie beginnt bei y^*, x^*, τ^* , wobei y^* und τ^* durch (1.9.13) gegeben sind, und ihre Tangentenrichtung $\dot{x}_e : \dot{y}_e(\tau^*)$ im Anfangspunkt gibt die Geschwindigkeit eines dort entstehenden **Stoßes** wieder. Differentiation von (1.9.14) liefert

$$\dot{x}_e : \dot{y}_e(\tau^*) = c(f(\tau^*)).$$

Bei seiner Entstehung ist der Stoß schwach und fällt in die Charakteristik, welche die Enveloppe in (x^*, y^*) berührt.

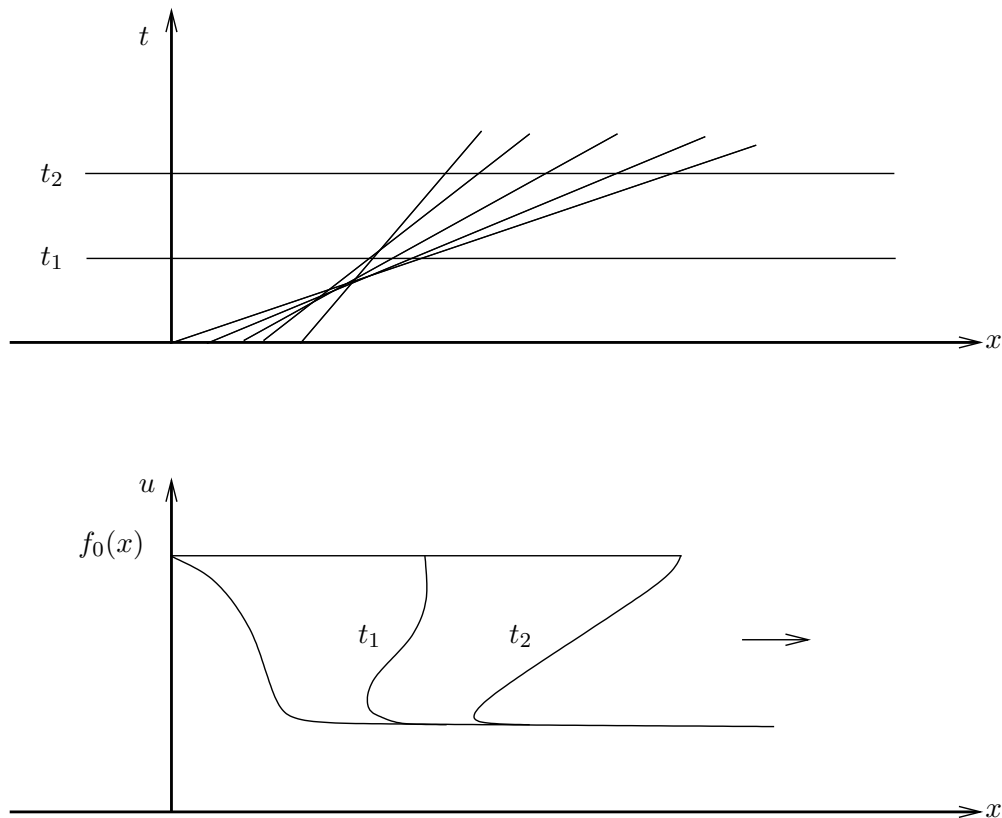


Bild 19: Überrollen einer Verdichtungswelle

Wie wir am Beispiel der Verdichtungswelle sehen, wird u für $y > y^*$ als Funktion von x und y **mehrwertig** und dies ist nicht mehr sinnvoll. Wir sind deshalb gezwungen, **unstetige** Lösungen zuzulassen.

Definition: u heißt **schwache Lösung** des Cauchyschen Anfangswertproblems (1.9.1), (1.9.4) in $\mathcal{G} \cap \{t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann, wenn u integrierbar ist und für jede *Testfunktion* $w \in C_0^\infty(\mathcal{G})$ die Gleichung

$$\int \int_{\mathcal{G} \wedge t \geq 0} \{uw_t + (\text{grad}_x w) \cdot \vec{Q}(u) + wH\} dxdt + \int_{\mathcal{G} \wedge t=0} f(\vec{x})w(\vec{x},0)dx = 0 \quad (1.9.15)$$

erfüllt ist. Dieser schwache (distributionelle) Lösungsbegriff ist eine Verallgemeinerung des üblichen Lösungsbegriffes, wie das folgende Lemma zeigt.

1.9.2 Lemma: u sei schwache Lösung, d.h. erfülle (1.9.15), sei stetig und darüberhinaus für $t \geq 0$ stückweise stetig differenzierbar. Dann ist $u(\vec{x},t)$ auch Lösung des klassischen Anfangswertproblems (1.9.1), (1.9.4).

Beweis: Da $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ und da u in (1.9.15) stetig differenzierbar ist, können wir die linke Seite partiell integrieren und erhalten mit dem Gaußschen Satz für jede solche Funktion w :

$$\begin{aligned}
& - \int_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^n} w(u_t + \nabla_x \cdot \vec{Q}(u(\vec{x}))) dx dt + \int_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^n} w H dx dt \\
& + \int_{\mathbb{R}^n} \{w(\vec{x}, 0) f(\vec{x}) - w(\vec{x}, 0) u(\vec{x}, 0)\} dx = 0.
\end{aligned} \tag{1.9.16}$$

Wählen wir insbesondere $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \cap \{t > 0\})$, so ist $w(\vec{x}, 0) = 0$, und wir erhalten für alle diese w :

$$\int_{t > 0} \int_{\mathbb{R}^n} w \{H - u_t - \nabla_x \cdot \vec{Q}(u(\vec{x}))\} dx dt = 0,$$

also

$$u_t + \nabla_x \cdot \vec{Q}(u(\vec{x}, t)) = H$$

in allen Stetigkeitspunkten von $(u_t, \nabla_x u)$. Mit dieser Differentialgleichung vereinfacht sich (1.9.16) zu

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(\vec{x}, 0) (f(\vec{x}) - u(\vec{x}, 0)) dx = 0 \tag{1.9.17}$$

für jede Testfunktion $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Da die Differenz $(f(\vec{x}) - u(\vec{x}, 0))$ stückweise stetig vorausgesetzt wird, folgt hieraus $f(\vec{x}) = u(\vec{x}, 0)$ in allen Stetigkeitspunkten. \square

In §1.1 haben wir die Formulierung der Erhaltungssätze in Integralform kennengelernt. Für (1.9.1) lautet diese Formulierung:

$$\frac{d}{dt} \int_{G(t)} u(\vec{x}, t) dx = \int_{G(t)} H(\vec{x}, t) dx \tag{1.9.18}$$

für jedes mitgeführte Kontrollvolumen $G(t)$, wobei mit $F = u$ in (1.1.13) das Geschwindigkeitsfeld als

$$\vec{v} = \frac{1}{u} \vec{Q}(u) \quad \text{für } u \neq 0 \tag{1.9.19}$$

zu wählen ist. Auch die Formulierung (1.9.18) läßt unstetige Lösungen u zu. Zudem wird diese Formulierung oft *direkt* aus physikalischen Bilanzgleichungen gewonnen, die Differentialgleichungen ergeben sich erst als *Folgerungen*. Damit stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen schwacher Formulierung (1.9.15) und Integralform (1.9.18) für eine Transportgleichung. Dazu benötigen wir eine spezielle Version des Gaußschen Satzes im \mathbb{R}^{n+1} .

Definition: $\mathcal{G}_0 \Subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit stückweise glattem Rand $\partial \mathcal{G}_0$ heißt von außen **parallelapproximierbar** genau dann, wenn ein $\delta > 0$ und „Parallelränder“ $\partial \mathcal{G}_\lambda$ für $0 < \lambda \leq \delta$ existieren mit den Eigenschaften

- a) $\mathcal{G}_\delta \supseteq \mathcal{G}_0$ mit glattem und stückweise stetig differenzierbarem Rand $\partial \mathcal{G}_\delta$,
- b) $\mathcal{G}_\delta \setminus \mathcal{G}_0 = \bigcup_{\lambda=0}^\delta \partial \mathcal{G}_\lambda$, und für alle $\lambda \in (0, \delta]$ gilt

$$\partial \mathcal{G}_\lambda \ni \vec{x} = \vec{\xi}_\lambda := \vec{\xi} - (\delta - \lambda) \vec{n}(\xi).$$

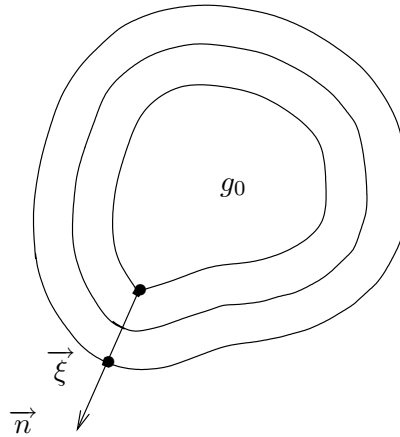


Bild 20: Von außen parallel-approximierbarer Bereich

Also ist \vec{n} die gemeinsame äußere Normale zu jedem der Parallelränder $\partial\mathcal{G}_\lambda$. Von außen parallel-approximierbare Bereiche sind z.B. Kugeln, Quader und konvexe Bereiche.

1.9.3 Satz: (Haarsches Lemma) [19, 81] : Seien \vec{F} und H in $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stückweise stetig und erfüllen

$$\int_{\mathcal{G}} (\vec{F} \cdot \nabla_y + H) w dy = 0 \quad \text{für alle } w \in C_0^\infty(\mathcal{G}). \quad (1.9.20)$$

Dann gilt für jeden von außen parallel-approximierbaren kompakten Bereich $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \oint_{\partial\mathcal{G}_\lambda} \vec{F} \cdot \vec{N} dO =: \oint_{\partial\mathcal{G}_0} \vec{F} \cdot \vec{N} dO = \int_{\mathcal{G}_0} H dy. \quad (1.9.21)$$

Dabei sind \vec{N} die äußere Normale und dO das Oberflächenelement von $\partial\mathcal{G}_\lambda$.

Beweis: Da in (1.9.20) \vec{F} und H stückweise stetig sind und $C_0^\infty(\mathcal{G})$ dicht liegt in

$$H_0^1(\mathcal{G}) := \left\{ \varphi \in L_2(\mathcal{G}) \mid \|\varphi\|_{H^1(\mathcal{G})} := \left\{ \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{G})}^2 + \int_{\mathcal{G}} |\nabla\varphi|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \right. \\ \left. \wedge \exists \varphi_\ell \in C_0^\infty(\mathcal{G}) : \|\varphi - \varphi_\ell\|_{H^1(\mathcal{G})} \rightarrow 0 \text{ für } \ell \rightarrow \infty \right\},$$

ist (1.9.20) auch für alle $w \in H_0^1(\mathcal{G})$ erfüllt. Wir wählen die spezielle Familie von Testfunktionen $w_\lambda \in H_0^1(\mathcal{G})$:

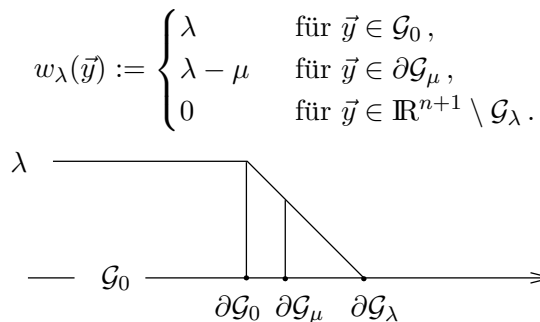


Bild 21: Die spezielle Familie von Testfunktionen $w_\lambda(\vec{y})$

Dann lautet (1.9.20): Für jedes $\lambda \in (0, \delta)$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &:= \int_{\mathcal{G}} (\vec{F} \cdot \nabla_y + H) w_\lambda dy \\ &= \lambda \int_{\mathcal{G}_0} H dy + \int_{\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_0} (\vec{F} \cdot \nabla_y + H) w_\lambda dy \\ &= \lambda \int_{\mathcal{G}_0} H dy + \int_0^\lambda (\lambda - \mu) \oint_{\partial \mathcal{G}_\mu} H dO d\mu - \int_0^\lambda \oint_{\partial \mathcal{G}_\mu} \vec{F} \cdot \vec{N} dO d\mu = 0.\end{aligned}\tag{1.9.22}$$

Differenzieren liefert

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = \int_{\mathcal{G}_0} H dy + \int_0^\lambda \oint_{\partial \mathcal{G}_\mu} H dO d\mu - \oint_{\partial \mathcal{G}_\lambda} \vec{F} \cdot \vec{N} dO = 0.$$

Läßt man λ gegen Null streben, so folgt die Behauptung (1.9.21). \square

1.9.4 Satz (Umkehrung des Haarschen Lemmas): \vec{F} und H seien stückweise stetig und (1.9.21) gelte für jede Kugel in \mathcal{G} . Dann ist (1.9.20) erfüllt.

Der Beweis erfordert Hilfsmittel, die über unseren Rahmen hinausgehen, siehe [81] Hilfsatz 15.6.

1.9.5 Folgerungen: (1.9.20) gilt genau dann, wenn (1.9.21) für jeden stückweise glatt berandeten kompakten Gaußschen Normalbereich $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ gilt. In diesem Sinn sind (1.9.20) und (1.9.21) äquivalent. Dafür reicht sogar aus, daß H und \vec{F} sowie $\vec{F} \cdot \vec{N}|_{\partial \mathcal{G}_0}$ auf $\partial \mathcal{G}_0$ für jeden der benutzten Bereiche \mathcal{G}_0 summierbar sind.

Beweis:

i) Wie oben gezeigt, folgt (1.9.21) aus (1.9.20) für jeden kanonischen Bereich \mathcal{G}_0 . Dann liefert Zusammensetzen die Behauptung (1.9.21) für stückweise glatt berandete Gaußsche Normalbereiche.

ii) Gilt (1.9.21) für alle Gaußschen Normalbereiche \mathcal{G}_0 , so insbesondere für Kugeln; d.h. (1.9.20) folgt aus Satz 1.9.4.

iii) Ist das Vektorfeld $\vec{F} \in L_1(\mathcal{G})$, also nur Lebesgue-integrierbar vorgegeben und $\vec{F} \cdot \vec{N}|_{\partial \mathcal{G}_0} \in L_1(\partial \mathcal{G}_0)$, so kann \vec{F} durch eine in $L_1(\mathcal{G})$ konvergente Folge $\vec{F}_{(\ell)} \in C^\infty(\mathcal{G})$ approximiert werden, d.h.

$$\|\vec{F}_{(\ell)} - \vec{F}\|_{L_1(\mathcal{G})} \rightarrow 0$$

sowie

$$\int_{\partial \mathcal{G}_0} \vec{F}_{(\ell)} \cdot \vec{N} dO \rightarrow \int_{\partial \mathcal{G}_0} \vec{F} \cdot \vec{N} dO \quad \text{für } \ell \rightarrow \infty.$$

Dann erhält man mit der Wahl $H_{(\ell)} := \nabla_y \cdot \vec{F}_{(\ell)}$ zu $\vec{F}_{(\ell)}$ die Beziehung (1.9.20) mit $\vec{F}_{(\ell)}$ und diesem $H_{(\ell)}$, und Satz 1.9.3 liefert die Gleichung (1.9.21) mit $\vec{F}_{(\ell)}$ und $H_{(\ell)}$. Wegen

$$\left| \int_{\mathcal{G}} H_{(\ell)} w dy \right| = \left| \int_{\mathcal{G}} \vec{F}_{(\ell)} \cdot \nabla w dy \right| \leq \|\vec{F}_{(\ell)}\|_{L_1} \|\nabla w\|_{L_\infty}$$

konvergieren dann auch

$$\int_{\mathcal{G}} H_{(\ell)} w dy \rightarrow \int_{\mathcal{G}} H w dy \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{G}_0} H_{(\ell)} dy \rightarrow \int_{\mathcal{G}_0} H dy \quad \text{für } \ell \rightarrow \infty,$$

womit schließlich die Äquivalenz von (1.9.20) mit (1.9.21) für \vec{F} und H aus derjenigen für $\vec{F}_{(\ell)}, H_{(\ell)}$ folgt. \square

1.9.6 Satz: Die Substanzlinien $\vec{x}(t)$ des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v} , definiert als Lösungen von

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}, t)$$

mögen das Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ schlicht überdecken. $G(t)$ sei ein beliebiges mitgeführtes Kontrollvolumen mit $(G(t), t) \subset \mathcal{G}$. Dann sind die schwache Form

$$\int_{\mathcal{G}} \Phi \{w_t + \vec{v} \cdot \nabla_x w\} dx dt = \int_{\mathcal{G}} H w dx dt \quad \text{für alle } w \in C_0^\infty(\mathcal{G}) \quad (1.9.23)$$

und die integrale Form

$$\frac{d}{dt} \int_{G(t)} \Phi(x, t) dx = \int_{G(t)} H(x, t) dx \quad \text{für alle Kontrollvolumina } G(t), \quad (1.9.24)$$

der Bilanzgleichung äquivalent für stückweise stetige Funktionen H und Φ .

Beweis: Zum Beweis wenden wir das Haarsche Lemma bzw. Folgerung 1.9.5 auf den von außen parallel-approximierbaren Bereich

$$\mathcal{G}_0 := \{(\vec{x}, t) \mid \vec{x} \in G(t) \wedge t_0 \leq t \leq t_1\} \subset \mathcal{G}$$

an mit $\vec{F} := \Phi \vec{V}$ sowie $\vec{V} = (\vec{v}(\vec{x}, t), 1)$ und $\vec{y} = (\vec{x}, t)$. Dazu ermitteln wir zunächst $\partial \mathcal{G}_0$ und die äußeren Normalen, wobei beachtet werden muß, daß auf dem Randteil $B = \{(\vec{x}, t) \mid \vec{x} \in \partial G(t)\}$ für $t_0 < t < t_1\} \subset \partial \mathcal{G}$ das Feld $\vec{V}(\vec{x}, t)$ tangential ist.

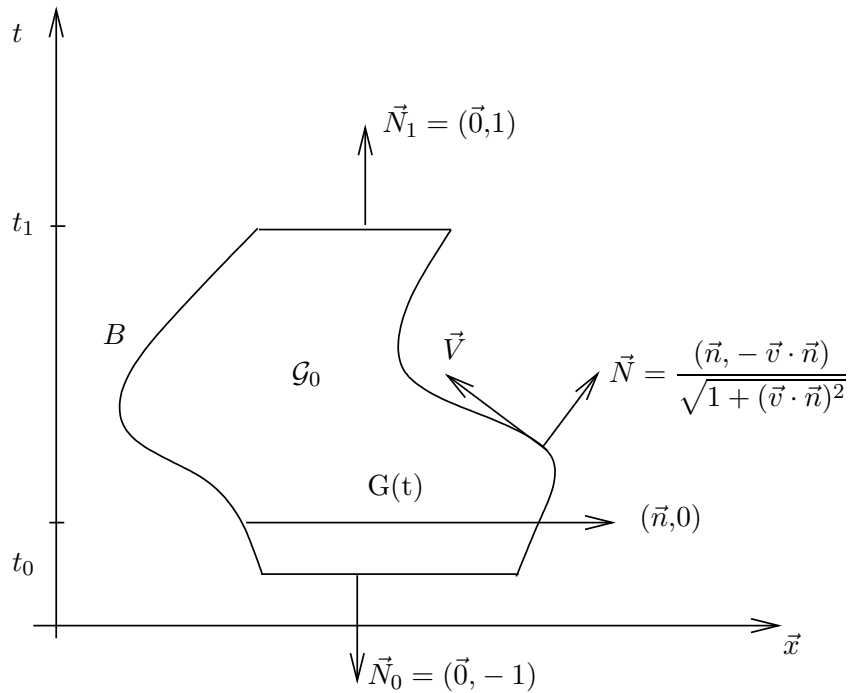


Bild 22: Bereich \mathcal{G}_0 bei mitgeführtem Kontrollvolumen $G(t)$

Die äußeren Normalen an $\partial\mathcal{G}_0$ lauten mit der äußeren räumlichen Normalen $\vec{n}(\vec{x}, t)$ an $\partial G(t)$ und $\vec{N} = (\vec{n}, -\vec{v} \cdot \vec{n}) / \sqrt{1 + (\vec{v} \cdot \vec{n})^2}$ auf dem Randteil B von $\partial\mathcal{G}_0$ sowie $\vec{N}_0 = (\vec{0}, -1)$ auf dem Boden $G(t_0)$ bzw. Deckel $G(t_1)$ von \mathcal{G}_0 .

Die schwache Formulierung entspricht (1.9.20) und ist nach Folgerung 1.9.5 äquivalent zu (1.9.21):

$$\oint_{\partial\mathcal{G}_0} \vec{F} \cdot \vec{N} dO = \int_{\mathcal{G}_0} H dv_{n+1},$$

wobei $\vec{y} = (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist und dv_{n+1} das $(n+1)$ -dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. Wir schreiben linke und rechte Seite um:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{G}_0} \vec{F} \cdot \vec{N} dO &= \oint_{\mathcal{G}_0} \Phi((\vec{v}, 1) \cdot \vec{N}) dO \\ &= \int_{G(t_0)} \Phi((\vec{v}, 1) \cdot (\vec{0}, -1)) dx + \int_{G(t_1)} \Phi((\vec{v}, 1) \cdot (\vec{0}, 1)) dx \\ &\quad + \int_B \Phi((\vec{v}, 1) \cdot (\vec{n}, -\vec{v} \cdot \vec{n})) dO \\ &= \int_{G(t_1)} \Phi(\vec{x}, t_1) dx - \int_{G(t_0)} \Phi(\vec{x}, t_0) dx, \\ \int_{\mathcal{G}_0} H dv_{n+1} &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{G(t)} H(\vec{x}, t) dx dt. \end{aligned}$$

Wir erhalten für alle zulässigen $t_1 \geq t_0$ die Gleichung

$$\int_{G(t_1)} \Phi(\vec{x}, t_1) dx - \int_{G(t_0)} \Phi(\vec{x}, t_0) dx = \int_{t_0}^{t_1} \int_{G(t)} H(\vec{x}, t) dx dt.$$

Folglich liefert Differentiation beider Seiten nach t_1 die integrale Form der Erhaltungsgleichung

$$\frac{d}{dt_1} \int_{G(t_1)} \Phi(\vec{x}, t_1) dx = \int_{G(t_1)} H(\vec{x}, t_1) dx.$$

Geht man umgekehrt von dieser aus, so liefert Integration beider Seiten nach $t_1 \geq t_0$ wie oben die Gleichung (1.9.20) bzw. (1.9.23). Also sind schwache und integrale Formulierung äquivalent. \square

Obwohl die schwache Formulierung (1.9.15) für u Unstetigkeiten verschiedenster Natur zuläßt, bilden viele physikalische Vorgänge häufig Unstetigkeiten spezieller Gestalt aus. Zu ihnen gehören die **Stoßfronten**.

1.9.7 Satz: u sei stückweise stetig differenzierbare unstetige schwache Lösung von (1.9.15) und besitze eine glatte orientierbare Unstetigkeitsfläche

$\vec{x} = \vec{\Sigma}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}; t)$ mit der Normalen \vec{n} und mit der Geschwindigkeit $\frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t}$ — eine sogenannte Stoßfront Σ . Dann gilt entlang der Stoßfront die Stoßbedingung von Rankine–Hugoniot [110, 67] :

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} [u_1 - u_2] = \vec{n} \cdot [\vec{Q}(u_1) - \vec{Q}(u_2)] \quad \text{auf } \Sigma. \quad (1.9.25)$$

Hierbei bezeichnen u_1 und u_2 die jeweiligen einseitigen Grenzwerte von u am Stoß Σ .

Beweis: Wir wählen die Formulierung (1.1.12) für einen mitgeführten Kontrollbereich $G(t) = G_1(t) \cup G_2(t)$, der aus zwei Teilbereichen auf den beiden Seiten von Σ besteht (siehe Bild 23).

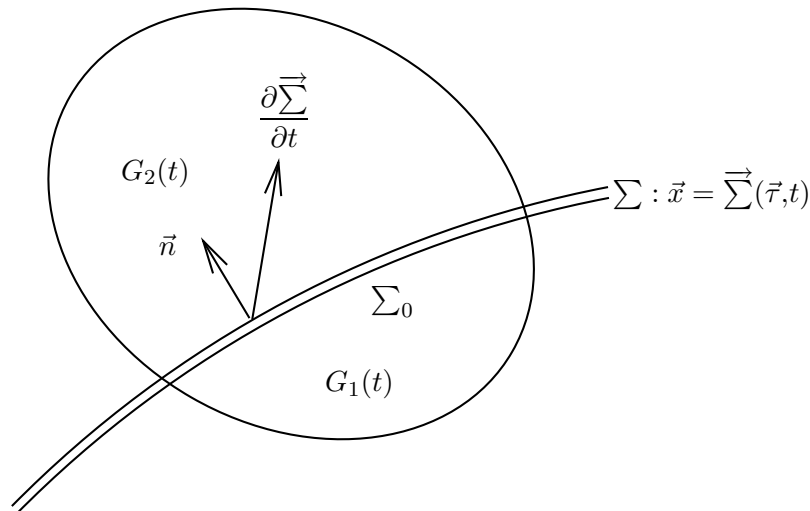


Bild 23: Testgebiet für die Rankine–Hugoniot–Bedingung

Aus (1.1.2) folgt dann mit (1.1.12) und (1.1.19)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{G_1(t) \cup G_2(t)} u dx &= \frac{d}{dt} \int_{G_1(t)} u dx + \frac{d}{dt} \int_{G_2(t)} u dx \\
&= \int_{G_1} u_t dx + \int_{\partial G_1 \setminus \Sigma} u_1 \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{\partial G_1 \cap \Sigma} u_1 \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} \cdot \vec{n} do \\
&\quad + \int_{G_2} u_t dx + \int_{\partial G_2 \setminus \Sigma} u_2 \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{\partial G_2 \cap \Sigma} u_2 \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} \cdot \vec{n} do \\
&= \int_{G_1} u_t dx + \int_{\partial G_1} \vec{Q}(u_1) \cdot d\vec{\sigma} - \int_{\partial G_1 \cap \Sigma} \left(\vec{Q}(u_1) \cdot \vec{n} - u_1 \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) do \\
&\quad + \int_{G_2} u_t dx + \int_{\partial G_2} \vec{Q}(u_2) \cdot d\vec{\sigma} + \int_{\partial G_1 \cap \Sigma} \left(\vec{Q}(u_2) \cdot \vec{n} - u_2 \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) do, \\
&= \int_{G_1 \cup G_2} (u_t + \operatorname{div}_x \vec{Q}(u)) dx \\
&\quad + \int_{\partial G_1 \cap \Sigma} \left\{ \vec{Q}(u_2) - \vec{Q}(u_1) - (u_2 - u_1) \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} \right\} \cdot \vec{n} do.
\end{aligned}$$

Verwenden wir nun die integrale Bilanzgleichung (1.9.18), so ergibt sich

$$\int_{G_1 \cup G_2} \{H - u_t - \operatorname{div}_x \vec{Q}(u)\} dx = \int_{\partial G_1 \cap \Sigma} \left\{ \vec{Q}(u_2) - \vec{Q}(u_1) - (u_2 - u_1) \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} \right\} \cdot \vec{n} do.$$

Außerhalb Σ erfüllt u nach Lemma 1.9.2 die Differentialgleichung, d.h. die linke Seite verschwindet, und es gilt schließlich

$$\int_{\Sigma_0} \left\{ [\vec{Q}(u_2) - \vec{Q}(u_1)] - (u_2 - u_1) \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} \right\} \cdot \vec{n} do = 0,$$

wobei Σ_0 nun ein beliebiges Teilgebiet von Σ ist. Folglich muß der Integrand verschwinden, d.h. es muß (1.9.25) gelten. \square

In einer Dimension gilt für den Stoß $x = \Sigma(t)$, und die Normale \vec{n} fällt in die einzige räumliche Richtung. Deshalb gilt hier

$$\frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial t} \cdot \vec{n} = \frac{d\Sigma}{dt}. \quad (1.9.26)$$

1.9.8 Beispiel: (Siehe auch [89] .) Die **Burgers-Gleichung**, ein vereinfachtes Modell der Navier-Stokes Gleichungen in einer Dimension lautet

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = u_t + uu_x = 0. \quad (1.9.27)$$

Wir betrachten hierfür das *Riemann-Problem*

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \quad \text{und} \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (1.9.28)$$

Mit (1.9.12) hatten wir bereits die Lösung des Riemann-Problems mit Verdünnungsfächer bestimmt. *Wir versuchen jetzt, eine stückweise konstante Lösung mit drei Stößen zu finden.*

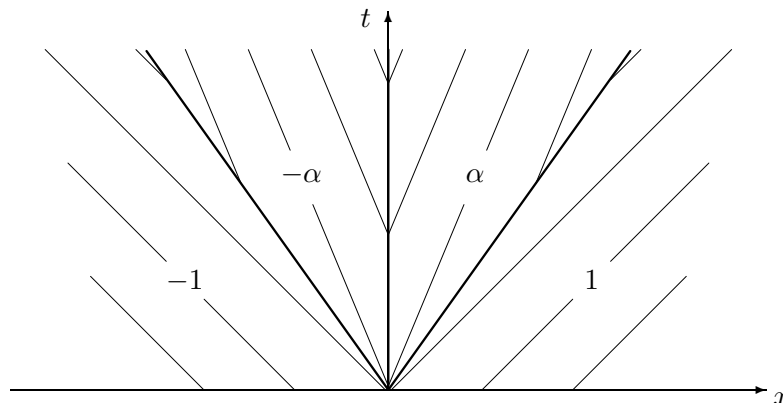


Bild 24: Lösung der Burgers-Gleichung mit 3 Stößen

Stoß bei $x = 0$: Hier lautet die Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0 = (\alpha^2 - \alpha^2)/2\alpha,$$

und sie ist in der Umgebung der t -Achse erfüllt, wenn wir dort z.B. $u = \alpha$ für $x > 0$ und $u = -\alpha$ für $x < 0$ wählen.

Stoß nach rechts: Mit der Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{2}\right)/(\alpha - 1) = \frac{\alpha + 1}{2}$$

ergibt sich die Stoßgeschwindigkeit zu $(\alpha + 1)/2$.

Stoß nach links: Wie eben erhält man

$$\frac{d\Sigma}{dt} = -\frac{\alpha + 1}{2}.$$

Damit ergibt sich die **Lösung mit drei Stößen** als

$$u_\alpha(t,x) = \begin{cases} -1 & \text{für } 2x < -(1+\alpha)t, \\ -\alpha & \text{für } -(1+\alpha)t < 2x < 0, \\ \alpha & \text{für } 0 < 2x < (\alpha+1)t, \\ 1 & \text{für } (\alpha+1)t < 2x. \end{cases}$$

Diese Lösung kann so für jedes $\alpha \in (0,1)$ definiert werden. Das bedeutet, daß die schwache Lösung mit Stößen nicht mehr eindeutig ist!

Aufgabe 22: Zum Riemann–Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} u^3 \right) = 0, u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

bestimme man

- eine Lösung mit einem Verdünnungsfächer,
- eine Lösung mit Stoß,
- eine Lösung mit Stoß und Verdünnungsfächer.

1.10 Entropiebedingungen

Ein Zustand mit Unstetigkeiten wird durch die schwache Form der Erhaltungsgleichung nicht mehr eindeutig beschrieben, so daß *zusätzliche* Eigenschaften für die Auswahl der physikalisch sinnvollen Lösung hinzugenommen werden müssen. In der Thermodynamik ist dies der zweite Hauptsatz, der besagt, daß die thermodynamische Entropie zunehmen muß. (Siehe dazu auch [4] .) Anlehnung daran führen wir auch hier der Lösung u zugeordnete Größen wie folgt ein.

Definition: Das Funktionenpaar $(\eta(u), \psi(u))$ heißt **Entropie–Paar** zur Erhaltungsgleichung

$$u_t + Q'(u)u_x = 0 \tag{1.10.1}$$

falls $\eta'' > 0$ erfüllt ist und der Entropiefluß ψ der Gleichung

$$\psi' = \eta' Q' \tag{1.10.2}$$

genügt.

Negative thermodynamische Entropie und Entropiefluß bilden ein Entropiepaar bei eindimensionalen Gasströmungen.

1.10.1 Lemma: u sei stetig differenzierbare Lösung der Erhaltungsgleichung (1.10.1). Dann erfüllt jedes Entropie–Paar die Erhaltungsgleichung

$$\left(\eta(u(x,t)) \right)_t + \left(\psi(u(x,t)) \right)_x = 0. \tag{1.10.3}$$

Beweis: Die linke Seite in (1.10.3) liefert mit (1.10.2) wegen (1.10.1) die Gleichung

$$\eta' u_t + \psi' u_x = \eta' \{u_t + Q'(u)u_x\} = 0. \quad \square$$

Insbesondere folgt aus dem Lemma, daß entlang den Charakteristiken nicht nur u sondern auch jede Entropie konstant ist.

In der Strömungsmechanik ergeben sich die Eulerschen Gleichungen für kompressible Gasströmungen ohne Reibung aus den Navier–Stokes–Gleichungen durch Vernachlässigung der Viskosität, und physikalisch sinnvolle Lösungen der reibungsfreien Gleichungen sollten Grenzwerte von Viskositätslösungen sein. Für unsere einfache Erhaltungsgleichung hat E. Hopf [65] mit der sogenannten Viskositätsmethode ein Auswahlprinzip aufgrund von Entropiebedingungen wie folgt motiviert.

Viskositätsmethode:

Wir betrachten eine Familie von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einem sogenannten Viskositätsterm auf der rechten Seite

$$u_t^\varepsilon + Q'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \quad \text{mit } 0 < \varepsilon \rightarrow 0 \text{ und für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (1.10.4)$$

sowie gemeinsamer Anfangsbedingung

$$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x).$$

Wir nehmen an, daß eine Familie von Lösungen $u^\varepsilon(x,t)$ existiert mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} |u^\varepsilon(x,t)| &\leq M < \infty \text{ und} \\ \int_{t_1}^{t_2} |u_x^\varepsilon(x,t)| dt &\leq C(x,t_1,t_2) \text{ gleichmäßig bezüglich } \varepsilon; \end{aligned}$$

es gilt $u^\varepsilon \rightarrow u$ fast überall, und u erfüllt die Gleichung (1.10.1). Mit dem Entropie–Paar (η, ψ) gelte

$$\eta(u^\varepsilon)_t + \psi(u^\varepsilon)_x \rightarrow \eta(u)_t + \psi(u)_x \text{ in } L_1(\mathcal{G})$$

für jeden festen kompakten Bereich $\mathcal{G} \in \mathbb{R}_+^2$.

Unter all diesen Voraussetzungen gilt dann für das Entropie–Paar nach Einsetzen von (1.10.4) die Gleichung

$$(\eta(u^\varepsilon))_t + (\psi(u^\varepsilon))_x = \varepsilon(\eta'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon)_x - \varepsilon\eta'' \cdot (u_x^\varepsilon)^2$$

und nach Integration

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \{\eta(u^\varepsilon)_t + \psi(u^\varepsilon)_x\} dx dt &= \int_{x_1}^{x_2} \eta(u^\varepsilon) dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \psi(u^\varepsilon) dt \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} [\eta'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon(x_2,t) - \eta'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon(x_1,t)] dt \\ &\quad - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \eta'' \cdot (u_x^\varepsilon)^2 dx dt \\ &\leq \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} [\eta'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon(x_2,t) - \eta'(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon(x_1,t)] dt. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \rightarrow 0_+$ erhalten wir aufgrund der oben gemachten Annahmen die folgende dem zweiten Hauptsatz entsprechende Ungleichung für das Entropiepaar (η, ψ) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \{\eta(u)_t + \psi(u)_x\} dx dt \leq 0, \text{ d.h. } \eta(u)_t + \psi(u)_x \leq 0 \text{ fast überall.} \quad (1.10.5)$$

Definition (O. Oleinik [106, 107]): Die schwache Lösung u der Erhaltungsgleichung (1.10.1) mit Cauchyscher Anfangsbedingung (1.9.17) heißt **Entropielösung**, wenn für alle Entropiepaare (η, ψ) und alle Testfunktionen $w \in C_0^\infty(\mathcal{G})$ mit $w \geq 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} w(x,0)\eta(u(x,0))dx + \iint_{\mathcal{G} \wedge t \geq 0} \{\eta(u)w_t + \psi(u)w_x\} dx dt \geq 0. \quad (1.10.6)$$

Bemerkung: Multiplizieren von (1.10.5) mit $w \geq 0$ liefert mit dem Gaußschen Satz

$$\begin{aligned} 0 &\geq \iint_{\mathcal{G} \wedge t \geq 0} w\{\eta_t(u) + \psi_x\} dx dt \\ &= \iint_{\mathcal{G} \wedge t \geq 0} \{(w\eta)_t + (w\psi)_x\} dx dt - \iint_{\mathcal{G} \wedge t \geq 0} \{\eta w_t + \psi w_x\} dx dt \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} w(x,0)\eta(u(x,0))dx - \iint_{\mathcal{G} \wedge t \geq 0} \{\eta w_t + \psi w_x\} dx dt, \end{aligned}$$

das ist (1.10.6).

Um auch für die Anwendungen sinnvolle schwache Lösungen zu erhalten, werden wir nun eine Funktionenklasse für eine skalare Erhaltungsgleichung festlegen, die einerseits groß genug ist, um Stoßlösungen zuzulassen, andererseits noch genügend gute Eigenschaften hat, um die notwendige Analysis, wie partielle Integration etc., zuzulassen.

Definition: $u(x,t)$ heißt **Funktion beschränkter Totalvariation** im Sinne von Cesari-Tonelli, wenn für jedes Paar von kompakten Intervallen $[a,b]$ und $[0,T]$ mit $T > 0$ zu u eine Konstante M existiert, so daß für jedes $t \in (0,T]$ und alle Zerlegungen $\mathcal{Z}_x = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_K = b\}$ sowie für jedes $x \in [a,b]$ und alle Zerlegungen $\mathcal{Z}_T = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{\tilde{K}} = T\}$ die Ungleichungen

$$\|u(\cdot, t)\|_{BV_{[a,b]}} := \sup_{\mathcal{Z}_x} \sum_{k=1}^K |u(x_k, t) - u(x_{k-1}, t)| \leq M \quad (1.10.7)$$

$$\|u(x, \cdot)\|_{BV_T[0,T]} := \sup_{\mathcal{Z}_T} \sum_{\tilde{k}=1}^{\tilde{K}} |u(x, t_{\tilde{k}}) - u(x, t_{\tilde{k}-1})| \leq M \quad (1.10.8)$$

erfüllt sind. (Für die Eigenschaften dieser Funktionen siehe insbesondere [48, 102, 111, 123] .)

1.10.2 Lemma: u sei unstetige stückweise stetig differenzierbare Entropielösung und Σ sei glatte Stoßfront. Dann gilt für alle Entropiepaare

$$\frac{d\Sigma}{dt}[\eta(u_\ell) - \eta(u_r)] \leq \psi(u_\ell) - \psi(u_r). \quad (1.10.9)$$

Gilt (1.10.9) für alle Entropiepaare und ist u unstetige stückweise stetig differenzierbare schwache Lösung mit Stoßfront Σ , so ist u dort Entropielösung.

Bemerkung: Das Lemma gilt auch noch für alle beschränkten Entropielösungen beschränkter Totalvariation.

Beweis: i) u sei Entropielösung. Dann betrachten wir als Integrationsgebiet ein Rechteck $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ mit $0 < t_1 < t_2$, welches von Σ geschnitten wird (siehe Bild 25).

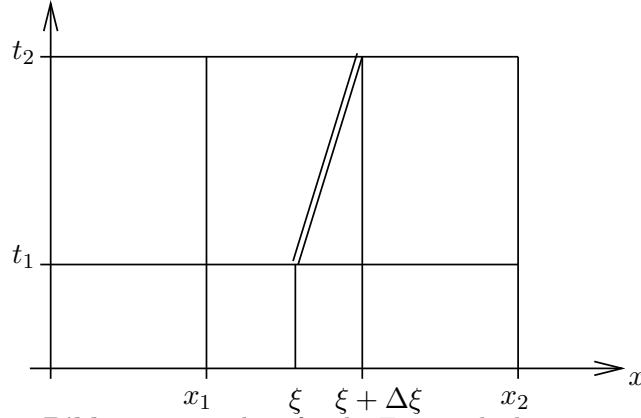


Bild 25: Testgebiet für die Entropiebedingung

Die Entropiegleichung (1.10.5) lautet hier nach partiellen Integrationen

$$\int_{x_1}^{x_2} (\eta(u(x, t_2)) - \eta(u(x, t_1))) dx + \int_{t_1}^{t_2} (\psi(u(x_2, t)) - \psi(u(x_1, t))) dt \leq 0.$$

Aufteilen des Integrationsgebietes und Mittelwertsatz bezüglich der t -Integration liefern mit $\Delta t = t_2 - t_1$ und $\Delta \xi = \Delta t \frac{d\Sigma}{dt}$ in einer Zwischenstelle $t^* \in [t_1, t_2]$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{\xi} \frac{\eta(u_\ell(x, t_2)) - \eta(u_\ell(x, t_1))}{\Delta t} dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{\xi}^{\xi + \Delta \xi} \eta(u_\ell(x, t_2)) dx \\ & + \int_{\xi + \Delta \xi}^{x_2} \frac{\eta(u_r(x, t_2)) - \eta(u_r(x, t_1))}{\Delta t} dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{\xi}^{\xi + \Delta \xi} \eta(u_r(x_1, t_1)) dx \\ & + [\psi(u_r(x_2, t^*)) - \psi(u_\ell(x_1, t^*))] \leq 0. \end{aligned}$$

Läßt man $\Delta t \rightarrow 0$ streben, so erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{\xi} \eta' \cdot u_{\ell t}(x, t_1) dx + \int_{\xi}^{x_2} \eta' u_{r t}(x, t_1) dx + \frac{d\Sigma}{dt} [\eta(u_\ell(\xi, t_1)) - \eta(u_r(\xi, t_1))] \\ & \leq [\psi(u_\ell(x_1, t_1)) - \psi(u_r(x_2, t_1))], \end{aligned}$$

und mit $x_1 \rightarrow \xi$ und $x_2 \rightarrow \xi$ folgt (1.10.9).

ii) Nun sei u stückweise stetig differenzierbare schwache Lösung mit Stoßfront Σ und (1.10.9) gelte für alle Entropiepaare. Dann wählen wir

$$w \geq 0, w \in C_0^\infty(G)$$

mit einem Gebiet G , das von Σ in zwei Teile zerlegt wird; $G \setminus \Sigma = G_\ell \cup G_r$.

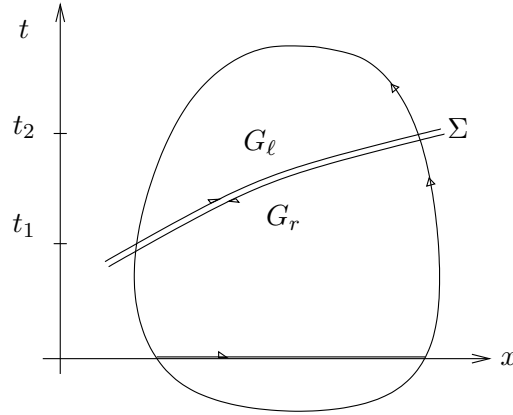


Bild 26: Testgebiet für Entropiepaare

Die Ungleichung (1.10.9) impliziert dann für das Integral

$$I := \oint_{\partial G_\ell} (\psi w dt - \eta w dx) + \oint_{\partial G_r} (\psi w dt - \eta w dx)$$

die Ungleichung

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Sigma, t_1}^{t_2} w \left\{ [\eta_r - \eta_\ell] \frac{d\Sigma}{dt} + [\psi_\ell - \psi_r] \right\} dt - \int_{\mathbb{R}} \eta(u(x,0)) w(x,0) dx \\ &\geq - \int_{\mathbb{R}} (\eta(u(x,0)) w(x,0) dx. \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach Anwendung des Gaußschen Satzes

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}} (\eta(u(x,0)) w(x,0) dx &\leq I = \iint_{G_\ell \cup G_r} ((\psi w)_x + (\eta w)_t) dx dt \\ &= \iint_{G_\ell \cup G_r} w(\psi_x + \eta_t) dx dt + \iint_{G_\ell \cup G_r} (\psi w_x + \eta w_t) dx dt \end{aligned}$$

mit

$$\iint_{G_\ell \cup G_r} w(\psi_x + \eta_t) dx dt = 0$$

wegen (1.10.3). Das ist gerade Ungleichung (1.10.6). \square

Definition: Die Familie von Funktionenpaaren für $k \in \mathbb{R}$:

$$\eta_k(u) := |u - k|, \psi_k(u) := \text{sign}(u - k)(Q(u) - Q(k)) \quad (1.10.10)$$

heißt Familie **Kružkovscher Entropiepaare**.

Man rechnet sofort nach, daß Gleichung (1.10.2) für alle $u \neq k$ erfüllt ist. Jedoch ist $\eta_k(u)$ weder strikt konvex noch zweimal stetig differenzierbar. Deshalb approximieren wir $\eta_k(u)$ durch strikt konvexe C^∞ -Funktionen durch Addition einer quadratischen Funktion sowie eine Familie Friedrichsscher "Mollifier" [51] S. 12. Dazu sei $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Abschneidefunktion mit $\rho \geq 0$, $\text{supp } \rho \subset [-1, 1]$ und $\int_{\mathbb{R}} \rho(y) dy = 1$. Mit dieser definieren wir die strikt konvexen zweimal stetig differenzierbaren Entropien

$$\eta_{k,\varepsilon}(u) := \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{\eta - u}{\varepsilon}\right) |\eta - k| d\eta + \varepsilon(u - k)^2 \quad (1.10.11)$$

und die zugeordneten Entropieflüsse

$$\psi_{k,\varepsilon}(u) := \int_0^u \eta'_{k,\varepsilon}(v) Q'(v) dv. \quad (1.10.12)$$

Dann gelten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{|u| \leq R} |\eta_{k,\varepsilon}(u) - |u - k|| = 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{|u| \leq R} |\psi_{k,\varepsilon}(u) - \psi_k(u)| = 0 \quad (1.10.13)$$

sowie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\eta'_{k,\varepsilon}(\bullet) - \text{sign}(\bullet - k)\|_{L_1([-R, R])} = 0$$

für jedes $R > 0$.

Um einzusehen, dass $\eta_{k,\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine streng konvexe Entropiefunktion ist, transformieren wir $z\varepsilon = \eta - u$ und setzen die Definition des Betrages ein; dann gilt wegen $\varrho(z) = 0$ für $|z| \geq 0$:

$$\begin{aligned} \eta_{k,\varepsilon}(u) &= \int_{|z| \leq 1} \varrho(z) |u + \varepsilon z - k| dz + \varepsilon(u - k)^2 \\ &= \int_{\frac{k-u}{\varepsilon}}^{\infty} \varrho(z) (\varepsilon z + u - k) dz - \int_{-\infty}^{\frac{k-u}{\varepsilon}} \varrho(z) (\varepsilon z + u - k) dz + \varepsilon(u - k)^2. \end{aligned}$$

Differenzieren liefert mit der Leibniz-Regel

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\eta_{k,\varepsilon}(u) &= \int_{\frac{k-u}{\varepsilon}}^{\infty} \varrho(z)dz - \int_{-\infty}^{\frac{k-u}{\varepsilon}} \varrho(z)dz + 2\varepsilon(u-k), \\ \eta''_{k,\varepsilon}(u) &= \frac{2}{\varepsilon} \varrho\left(\frac{k-u}{\varepsilon}\right) + 2\varepsilon \geq 2\varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Wie wir sehen werden, kann man mit Hilfe der Entropiepaare $(\eta_{k,\varepsilon}, \psi_{k,\varepsilon})$ in Entropiegleichungen Kruřkov–Entropien approximieren.

Andererseits liegen alle stetigen konvexen Funktionen im Abschluř der konvexen Hülle der Funktionenfamilie

$$\{\zeta(u) = \gamma + \alpha u \mid \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\} \cup \{\zeta(u) = |u - k| \mid k \in \mathbb{R}\}$$

bezüglich der Norm $\|\zeta\|_{C^0([-R,R])}$.

Das bedeutet, für jede stetige konvexe Funktion $\eta(u)$ und jedes beliebige $\varepsilon > 0$ existieren Zahlen $\sigma_j > 0$ mit $\sum_{j=1}^K \sigma_j = 1$ sowie $\alpha_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, N$ und $k_j \in \mathbb{R}$ für $j = N+1, \dots, K$, so dass gilt

$$\begin{aligned}\max_{|u| \leq R} \left| \eta(u) - \sum_{j=1}^N \sigma_j (\gamma_j + \alpha_j u) - \sum_{j=N+1}^K \sigma_j |u - k_j| \right| \\ + \|\eta' - \sum_{j=1}^N \sigma_j \alpha_j - \sum_{j=N+1}^K \sigma_j \text{sign}(u - k_j)\|_{L^1([-R,R])} < \varepsilon.\end{aligned}\tag{1.10.14}$$

Deshalb kann man sich in Entropieaussagen wiederum auf Kruřkov–Entropien beschränken. Unter anderem kann man die folgende Entropiebedingung zeigen.

1.10.3 Lemma (Oleinik [106, 107]): Für eine Lösung u beschränkter Totalvariation ist die Entropiebedingung (1.10.6) äquivalent zur Oleinikschen Bedingung: Für alle $u \in (u_\ell, u_r) \cup (u_r, u_\ell)$ gilt

$$\frac{Q(u_\ell) - Q(u)}{u_\ell - u} \geq \frac{Q(u_\ell) - Q(u_r)}{u_\ell - u_r} \geq \frac{Q(u) - Q(u_r)}{u - u_r}.\tag{1.10.15}$$

Beweis: Wir zeigen die Äquivalenz von (1.10.9) mit (1.10.15). Sei (1.10.9) erfüllt, dann verwenden wir dort das Entropiepaar $(\eta_{k,\varepsilon}, \psi_{k,\varepsilon})$ aus (1.10.11) und (1.10.12) und betrachten zunächst den Fall $u_r < u_\ell$ mit $u_r < k < u_\ell$. Dann gilt

$$\frac{d\Sigma}{dt} [\eta_{k,\varepsilon}(u_\ell) - \eta_{k,\varepsilon}(u_r)] \leq [\psi_{k,\varepsilon}(u_\ell) - \psi_{k,\varepsilon}(u_r)].$$

Setzen wir $R := \max\{|u_\ell|, |u_r|\}$, so liefert Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow \infty$ wegen (1.10.13) die Ungleichung

$$\frac{d\Sigma}{dt} (u_\ell - 2k + u_r) \leq (Q(u_\ell) - 2Q(k) + Q(u_r)).\tag{1.10.16}$$

Addieren wir auf beiden Seiten die Rankine–Hugoniot–Bedingung (1.9.25), so ergibt sich

$$2\frac{d\Sigma}{dt}(u_\ell - k) \leq 2(Q(u_\ell) - Q(k)).$$

Subtrahieren wir hingegen (1.9.25), so ergibt sich

$$2\frac{d\Sigma}{dt}(u_r - k) \leq 2(Q(u_r) - Q(k)).$$

Beide Ungleichungen zusammen liefern (1.10.15) für alle k mit $u_r \leq k \leq u_\ell$. Der Fall $u_\ell < u_r$ kann genau so behandelt werden.

Damit haben wir die Notwendigkeit von (1.10.15) gezeigt.

Nun sei (1.10.15) erfüllt. Dann ergibt sich mit der Rankine–Hugoniot–Bedingung (1.9.25) die Ungleichung (1.10.16) für alle k zwischen u_ℓ und u_r . Daraus folgt insbesondere

$$\frac{d\Sigma}{dt}(\eta_k(u_\ell) - \eta_k(u_r)) \leq (\psi_k(u_\ell) - \psi_k(u_r)) \quad (1.10.17)$$

für jedes Kružkov–Entropiepaar der Gestalt

$$\begin{aligned} \eta_k(u) &= \gamma + \alpha u + |u - k|, \\ \psi_k(u) &= \alpha Q(u) + (Q(u) - Q(k))\text{sign}(u - k). \end{aligned}$$

Ist $\eta(u)$ eine beliebige strikt konvexe zweimal stetig differenzierbare Entropiefunktion und $\psi(u)$ der zugehörige Fluß, so kann dieses Paar durch eine Folge von Konvexkombinationen

$$\eta_\varepsilon(u) = \sum_{j=1}^N \sigma_j(\gamma_j + \alpha_j u) + \sum_{j=N+1}^K \sigma_j |u - k_j| \quad \text{mit } \sigma_j \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^K \sigma_j = 1$$

in $[-R, R]$ gleichmäßig approximiert werden, und $\psi_\varepsilon(u)$ konvergiert gegen $\psi(u)$ dort ebenfalls gleichmäßig. Die Ungleichung (1.10.17) überträgt sich auf die Konvexkombination, d.h. es gilt

$$\frac{d\Sigma}{dt}(\eta_\varepsilon(u_\ell) - \eta_\varepsilon(u_r)) \leq (\psi_\varepsilon(u_\ell) - \psi_\varepsilon(u_r)).$$

Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert Ungleichung (1.10.9) für jedes Entropiepaar. \square

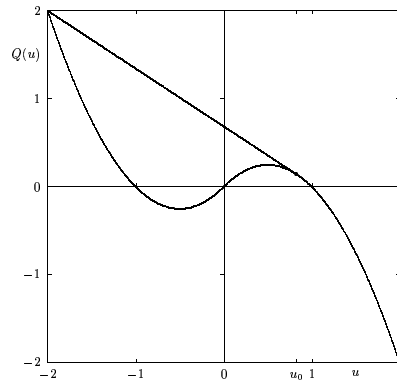
1.10.4 Satz: Die Oleinische Stoßbedingung (1.10.15) ist genau dann erfüllt, wenn die $(u_\ell, Q(u_\ell))$ und $(u_r, Q(u_r))$ verbindende Sekante der Kurve $Q(u)$ für $u_\ell < u_r$ ganz unterhalb bzw. für $u_\ell > u_r$ ganz oberhalb der Kurve $Q(u)$ verläuft.

1.10.5 Beispiel: Damit ist es jetzt möglich, Entropie–Lösungen zu “konstruieren”, z. B. für das Riemann–Problem

$$u_t + Q(u)_x = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad \text{und } t > 0$$

mit

$$Q(u) = \begin{cases} (u + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} & \text{für } u \leq 0, \\ -(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} & \text{für } u > 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1.5 & \text{für } x < 0, \\ -2 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Bild 27: Die Flussfunktion $Q(u)$

Wie Bild 27 zu entnehmen ist, tritt zwischen dem Zustand $u_r = -2$ und dem Zustand $u_0 > 0$ ein Stoß auf. Für u_0 haben wir

$$-\frac{(u_0 - \frac{1}{2})^2 + 2 - \frac{1}{4}}{u_0 + 2} = \frac{Q(u_r) - Q(u_0)}{u_r - u_0} = Q'(u_0) = -2\left(u_0 - \frac{1}{2}\right),$$

also $u_0 = 2(\sqrt{2} - 1)$. Zwischen $u_L = 1.5$ und u_0 bildet sich ein ‘‘Verdünnungsfächer’’. Wir erhalten also eine Entropie-Lösung, die sich aus drei Bereichen zusammensetzt: Dem Bereich links vom Fächer mit $u = u_L = 1.5$, dem Fächer mit der Ähnlichkeitslösung $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1-2u}$ für $u \leq u \leq 1.5$ sowie dem Bereich rechts vom Stoß mit der Geschwindigkeit $\frac{d\Sigma}{dt} = Q'(u_0) = -2(u_0 - \frac{1}{2})$, in dem $u = -2$ gilt (siehe Bild 28).

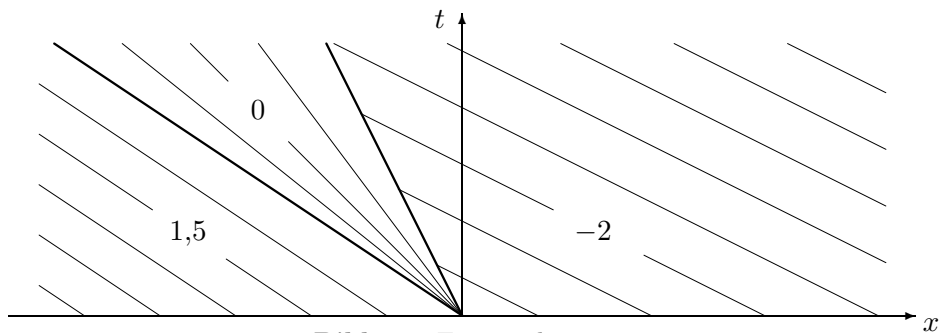


Bild 28: Entropielösung

1.10.6 Satz: Ist Q strikt konvex und u Entropielösung beschränkter Totalvariation, so gilt am Stoß die Entropiebedingung von P. Lax:

$$Q'(u_\ell) > \frac{d\Sigma}{dt} > Q'(u_r) \quad (1.10.18)$$

sowie die verschärfte Stoßbedingung

$$u_\ell > u_r. \quad (1.10.19)$$

Beweis: Da Q strikt konvex ist, kann man das spezielle Entropiepaar

$$\eta(u) := Q(u) \quad \text{und} \quad \psi'(u) = \eta'Q' = (Q'(u))^2$$

wählen. Ist $u_\ell = u_r$, so gilt

$$\frac{d\Sigma}{dt} = Q'(u_\ell) = Q'(u_r)$$

und $Q'(u)$ ist charakteristische Richtung; $u(\cdot, t)$ ist stetig bezüglich x , und ein Stoß liegt nicht vor. Nun zeigen wir (1.10.19) für $u_\ell \neq u_r$ mit einem Widerspruchsbeweis. Dazu nehmen wir zunächst $u_\ell < u_r$ an. Aus (1.10.9) folgt dann mit (1.9.25)

$$\frac{Q(u_\ell) - Q(u_r)}{u_\ell - u_r} \cdot (Q(u_\ell) - Q(u_r)) \leq \int_{u_r}^{u_\ell} (Q'(u))^2 du,$$

und daraus sowie mit der strikten Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_r - u_\ell} \int_{u_\ell}^{u_r} (Q'(u))^2 du &\leq \frac{(Q(u_r) - Q(u_\ell))^2}{(u_r - u_\ell)^2} = \left(\frac{1}{u_r - u_\ell} \int_{u_\ell}^{u_r} Q'(u) du \right)^2 \\ &< \frac{1}{u_r - u_\ell} \int_{u_\ell}^{u_r} (Q'(u))^2 du, \end{aligned}$$

da $Q'' > 0$, somit Q' strikt monoton vorausgesetzt ist.

Diese Ungleichung aber ist ein Widerspruch, so daß nur $u_\ell > u_r$ übrig bleibt. Der Mittelwertsatz liefert dann mit $u_r < \zeta < u_\ell$ die Behauptung:

$$Q'(u_r) < Q'(\zeta) = \frac{1}{u_\ell - u_r} (Q(u_\ell) - Q(u_r)) = \frac{d\Sigma}{dt} < Q'(u_\ell). \quad \square$$

Bemerkung: Die Laxsche Entropiebedingung in der Form

$$Q'(u_\ell) \geq \frac{d\Sigma}{dt} \geq Q'(u_r)$$

ist auch für eine Flußfunktion Q mit einem einzigen Wendepunkt zur Entropiebedingung (1.10.6) äquivalent.

1.10.7 Lemma: Sei $Q'' > 0$. Ist für eine Lösung beschränkter Totalvariation die Entropiebedingung (1.10.5) bzw. (1.10.6) bezüglich eines Entropiepaares erfüllt, so gilt sie für alle Entropiepaare.

Beweis: Für $t \geq 0$ sei $u(x, t)$ beschränkt, meßbar, sowie bei festem $t \in [0, T]$ von beschränkter Totalvariation bzgl. x gleichmäßig für $t \in [0, T]$, d.h.

$$\int_{X_1}^{X_2} |d_x u(\cdot, t)| \leq C \quad \text{für alle } t \in [0, T],$$

sowie bei festem $x \in [X_1, X_2]$ von beschränkter Totalvariation bzgl. t gleichmäßig für $x \in [X_1, X_2]$, d.h.

$$\int_0^T |d_t u(x, \cdot)| \leq C \text{ für alle } x \in [X_1, X_2].$$

Wir benötigen im Folgenden etwas Maßtheorie; siehe dazu [102]. Unter o.g. Voraussetzung ist $u(\cdot, t)$ für jedes feste t eine Funktion aus der ersten Baireschen Klasse bezüglich x , und es gibt nur abzählbar unendlich viele x -Unstetigkeiten bei festem t ; entsprechendes gilt für $u(x, \cdot)$ bezüglich t . (Siehe [102] Satz 2 auf Seite 242; Folgerung 2 auf Seite 245; Satz 4 auf Seite 458 und II. auf Seite 461.)

Damit ist auch $u(x, t)$ Funktion der ersten Baireschen Klasse sowie $Q \circ u$, $Q' \circ u$, $\eta' \circ u$, $\psi' \circ u$, $H' \circ u$ und $\psi' \circ u$; sowie für Entropie-Paare η, ψ und H, W die Funktionen $\eta \circ u$, $\psi \circ u$, $H \circ u$, $W \circ u$ jeweils von beschränkter Totalvariation bezüglich x und bezüglich t und jeweils Bairesche Funktionen der 1. Baireschen Klasse.

Sei nun u schwache Lösung und erfülle für alle $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{supp } w \cap \{t \geq 0\} \subset (X_1, X_2) \times [0, T]$:

$$\mathcal{L}(w) := \int_{X_1}^{X_2} w(x, 0)(\eta \circ u)(x, 0) dx + \int_{t=0}^T \int_{X_1}^{X_2} \{\eta \circ u\} w_t + (\psi \circ u) w_x \} dx dt \geq 0.$$

Aufgrund unserer Voraussetzungen kann dann (1-dimensional) partiell integriert werden [102] S. 257, und wir erhalten mit dem Lebesgue–Stieltjes–Maß

$$\iint_{\mathcal{B}} d\mathcal{M}(x, t) := \iint_{\mathcal{B}} \{d_t u(x, t) dx + d_x v(x, t) dt\}$$

mit $v(x, t) := (Q \circ u)(x, t)$, $d_t u = u_t(x, t) dt$ und $d_x v = (Q' \circ u(x, t)) u_x(x, t) dx$ in allen Stetigkeitspunkten von u_t bzw. u_x für Borel-messbare Mengen $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}_+^2$ die Darstellung von \mathcal{L} als Lebesgue–Stieltjes–Integral

$$\mathcal{L}(w) = - \int \int_{t \geq 0} w(x, t) (\eta' \circ u)(x, t) d\mathcal{M}(x, t).$$

Funktionsräume: Sei $\mathcal{G} := [X_1, X_2] \times [0, T]$.

$$\mathcal{C}_{(0)}^\infty := \{w \in C^\infty(\mathcal{G}) \mid \text{supp } w \subset (X_1, X_2) \times [0, T]\},$$

$$\mathcal{X} := \{w \mid \text{zu } w \text{ existiert eine Folge } w_\ell \in \mathcal{C}_{(0)}^\infty \text{ mit } \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|w_\ell - w\|_C = 0\},$$

$$\|w\|_C := \sup_{(x, t) \in \mathcal{G}} |w(x, t)|,$$

$\mathcal{B}_1(\mathcal{G})$ seien die Funktionen der ersten Baireschen Klasse.

Bekanntlich sind die Funktionen aus $\mathcal{B}_1(\mathcal{G})$ Grenzfunktionen punktweise konvergenter stetiger Funktionen.

$$\mathcal{B}_{1,0}(\mathcal{G}) := \{\chi \in \mathcal{B}_1(\mathcal{G}) \mid \chi = 0 \text{ für } x = X_1 \text{ oder } x = X_2 \text{ oder } t = T\}.$$

Wegen $(\eta' \circ u) \in \mathcal{B}_1(\mathcal{G})$ gilt $\|\eta' \circ u\|_C \leq c_1(\|u\|_C)$ und

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(w)| &\leq \|w\|_C \cdot c_1(\|u\|_C) \iint_{\mathcal{G}} |d\mathcal{M}| \\ &\leq \{c_1(\|u\|_C)(c(X_1 - X_2) + \|Q' \circ u\|_C T)\} \|w\|_C. \end{aligned}$$

Folglich ist $\mathcal{L}(w)$ ein stetiges lineares Funktional auf \mathcal{X} . Außerdem gilt $\mathcal{L}(w) \geq 0$ für $w \geq 0$ mit $w \in \mathcal{X}$.

Nun bestimmen wir eine stetige Fortsetzung von \mathcal{L} nach $\mathcal{B}_{1,0}(\mathcal{G})$. Bekanntlich ist $\mathcal{B}_1(\mathcal{G})$ mit $\|\cdot\|_C$ ein Banachraum und $\mathcal{X} \dot{\subset} \mathcal{B}_{1,0}(\mathcal{G}) \dot{\subset} \mathcal{B}_1(\mathcal{G})$. Sei $\tilde{w} \in \mathcal{B}_{1,0}$. Dann existiert eine Folge

$$w_\ell \in \mathcal{C}_{(0)}^\infty \quad \text{mit} \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} w_\ell(x,t) = \tilde{w}(x,t) \quad \text{punktweise und} \quad \|w_\ell\|_C \leq M.$$

Ist $\tilde{w} \geq 0$, so können wir die $w_\ell \geq 0$ wählen. Dann folgt mit dem Satz von Borel–Lebesgue über die majorisierte Konvergenz:

$$\mathcal{L}(w_\ell) = - \iint_{\mathcal{G}} w_\ell \cdot (\eta' \circ u) d\mathcal{M} \rightarrow - \iint_{\mathcal{G}} \tilde{w} \cdot (\eta' \circ u) d\mathcal{M} =: \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{w}) \quad \text{für} \quad \ell \rightarrow \infty.$$

Insbesondere ist $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{w}) \geq 0$ für $\tilde{w} \geq 0$ und $\tilde{w} \in \mathcal{B}_{1,0}(\mathcal{G})$; darüber hinaus gilt für die Norm der Fortsetzung $\|\mathcal{L}\| = \|\tilde{\mathcal{L}}\|$.

Wegen $\eta' \circ u \in \mathcal{B}_1$ und $(\eta' \circ u) \geq \gamma_0 > 0$ ist $\tilde{w} \cdot (\eta' \circ u) \in \mathcal{B}_{1,0}$ [102] Satz 3, S. 441. Außerdem gilt für $\tilde{W} \in \mathcal{B}_{1,0}$ mit $\tilde{W} \geq 0$ auch $\tilde{w} := \tilde{W}/(\eta' \circ u) \in \mathcal{B}_{1,0}$. Folglich ist

$$\tilde{\mathcal{L}}_1(\tilde{\varphi}) := - \iint_{\mathcal{G}} \tilde{\varphi}(x,t) d\mathcal{M} \quad \text{auf} \quad \mathcal{B}_{1,0}$$

ebenfalls stetig und

$$\tilde{\mathcal{L}}_1(\tilde{\chi}) \geq 0 \quad \text{für} \quad \tilde{\chi} \in \mathring{\mathcal{B}}_1 \quad \text{mit} \quad \tilde{\chi} \geq 0.$$

Für $\tilde{W} \in \mathcal{B}_{1,0}$ und ein zweites Entropiepaar ψ, H mit $\tilde{W} \geq 0$ ist auch $\tilde{\varphi} := \tilde{W} \cdot (H' \circ u) \in \mathcal{B}_{1,0}$, d.h.

$$\tilde{\mathcal{L}}_2(\tilde{W}) := \tilde{\mathcal{L}}_1(\tilde{W} \cdot (H' \circ u)) = - \iint_{\mathcal{G}} \tilde{W} \cdot (H' \circ u) d\mathcal{M} \geq 0.$$

Wegen $\mathcal{C}_{(0)}^\infty(\mathcal{G}) \dot{\subset} \mathcal{B}_{1,0}(\mathcal{G})$ gilt also auch

$$\mathcal{L}_2(W) := - \iint_{\mathcal{G}} W(x,t) \cdot (H' \circ u) d\mathcal{M} \geq 0 \tag{1.10.20}$$

für jedes $W \in \mathcal{C}_{(0)}^\infty(\mathcal{G})$ mit $W \geq 0$. (1.10.20) kann wieder — jeweils 1-dimensional — partiell integriert werden, und mit $\psi' = H'Q'$ erhalten wir für alle diese W

$$\mathcal{L}_2(W) = \int_{X_1}^{X_2} W(x,0)(H \circ u)(x,0) dx + \iint_{\mathcal{G}} \{(H \circ u)W_t + (\psi \circ u)W_x\} dx dt \geq 0.$$

Das ist die Behauptung. \square

1.10.8 Lemma: *u sei schwache Entropie-Lösung beschränkter Totalvariation des Cauchy-schen Anfangswertproblems und sei $Q'' \geq \varepsilon_0 > 0$. Dann existiert zu $[a,b] \subset \mathbb{R}$, der Zeit $T > 0$ und zu u eine Zahl E , so daß*

$$u(x + \delta, t) - u_\ell(x, t) \leq E \frac{\delta}{t} \quad (1.10.21)$$

für alle $a \leq x < x + \delta \leq b$ und $0 < t \leq T$ erfüllt wird.

Auch den Beweis dieses Lemmas überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Definition (Kružkov [83]): $u(x, t)$ sei für $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq T > 0$ meßbar und beschränkt. $u(x, t)$ heißt **Kružkovs schwache Lösung** des Anfangswertproblems (1.9.1), (1.9.4),

$$u_t + (Q(u))_x = 0 \quad \text{für } 0 < t \leq T \quad \text{mit } u(x, 0) = f(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wenn für alle $k \in \mathbb{R}$ und alle $w \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$ mit $w \geq 0$ gilt:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (|u(x, t) - k| w_t + \text{sign}(u(x, t) - k) \cdot \{Q(u(x, t)) - Q(k)\} w_x) dx dt \geq 0. \quad (1.10.22)$$

Zu $u(x, t)$ existiere eine Menge $\mathcal{E} \subset [0, T]$ vom Maß Null, so daß $u(\bullet, t)$ für $t \in [0, T] \setminus \mathcal{E}$ eine bezüglich x meßbare beschränkte Funktion ist, und für jedes $r > 0$ gilt

$$\lim_{([0, T] \setminus \mathcal{E}) \ni t \rightarrow 0} \int_{|x| \leq r} |u(x, t) - f(x)| dx = 0. \quad (1.10.23)$$

1.10.9 Satz von Kružkov: $u(x, t)$ und $v(x, t)$ seien zwei schwache Kružkov-Lösungen von

$$\begin{aligned} u_t + (Q(u))_x &= 0 \quad \text{mit } u(x, 0) = u_0(x), \\ v_t + (Q(v))_x &= 0 \quad \text{mit } v(x, 0) = v_0(x) \end{aligned}$$

und erfüllen $|u(x, t)| \leq M$, $|v(x, t)| \leq M$ für $|x| \leq R$, $0 \leq t \leq T$.

Dann folgt für alle $t \in [0, T]$ mit $N := \max_{|v| \leq M} |Q'(v)|$:

$$\int_{|x| \leq R - Nt} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{|x| \leq R} |u_0(x) - v_0(x)| dx. \quad (1.10.24)$$

Beweis: Sei $\mathcal{G} \subset (\mathbb{R} \times [0, T])$ ein kompakter Bereich und $g(x, t; y, \tau) \geq 0$ eine Funktion aus $C_0^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{G}} \times \overset{\circ}{\mathcal{G}})$. Wählen wir in (1.10.22) für die Testfunktionen $w(x, t) := g(x, t; y, \tau)$ und $k = v(y, \tau)$ zu jedem Parameterpunkt (y, τ) , so lautet die Kružkov-Ungleichung:

$$\int_{\mathcal{G}} \left\{ |u(x,t) - v(y,\tau)| g_t + \operatorname{sign}(u(x,t) - v(y,\tau)) \left(Q(u(x,t)) - Q(v(y,\tau)) \right) g_x \right\} dx dt \geq 0.$$

Nochmalige Integration über $(y,\tau) \in \mathcal{G}$ ergibt

$$\int_{\mathcal{G}} \int_{\mathcal{G}} \left\{ |u(x,t) - v(y,\tau)| g_t + \operatorname{sign}(u(x,t) - v(y,\tau)) \left(Q(u(x,t)) - Q(v(y,\tau)) \right) g_x \right\} dx dt dy d\tau \geq 0.$$

Die entsprechende Ungleichung erhält man aus (1.10.22) für die Lösung v , wobei (x,t) gegen (y,τ) ausgetauscht aber $w(y,\tau) := g(x,t; y,\tau)$ gewählt wird:

$$\int_{\mathcal{G}} \int_{\mathcal{G}} \left\{ |v(y,\tau) - u(x,t)| g_\tau + \operatorname{sign}(v(y,\tau) - u(x,t)) \left(Q(v(y,\tau)) - Q(u(x,t)) \right) g_y \right\} dy d\tau dx dt \geq 0.$$

Addition beider Ungleichungen ergibt nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge in der zweiten:

$$\int_{\mathcal{G}} \int_{\mathcal{G}} \left\{ |u(x,t) - v(y,\tau)| (g_t + g_\tau) + \operatorname{sign}(u(x,t) - v(y,\tau)) \left(Q(u(x,t)) - Q(v(y,\tau)) \right) (g_x + g_y) \right\} dx dt dy d\tau \geq 0. \quad (1.10.25)$$

Im Weiteren wird g speziell gewählt. Dafür sei $\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\lambda \geq 0$ und $\operatorname{supp} \lambda \subset (-1,1)$ eine Abschneidefunktion, die $\int_{\mathbb{R}} \lambda(s) ds = 1$ erfüllt und $w(\xi,\eta) \geq 0$ eine Funktion aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\operatorname{supp} w \subset (-r + 2\rho, r - 2\rho) \times (\rho, T - 2\rho)$, $T > 0$, $r > 0$, $0 < \rho < \frac{1}{2} \min\{T, r\}$. Dann wählen wir eine C_0^∞ -Approximation δ_ε des Dirac-Funktional δ ,

$$\delta_\varepsilon(s) := \frac{1}{\varepsilon} \lambda\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \text{ und } \varepsilon > 0,$$

und als Testfunktion g :

$$g(x,t; y,\tau) := w\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+\tau}{2}\right) \cdot \delta_\varepsilon(x-y) \cdot \delta_\varepsilon(t-\tau).$$

Damit ergeben sich

$$g_t + g_\tau = \frac{\partial w}{\partial \eta} \left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+\tau}{2} \right) \cdot \delta_\varepsilon(x-y) \cdot \delta_\varepsilon(t-\tau),$$

$$g_x + g_y = \frac{\partial w}{\partial \xi} \left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+\tau}{2} \right) \cdot \delta_\varepsilon(x-y) \cdot \delta_\varepsilon(t-\tau).$$

Setzen wir dies in Ungleichung (1.10.25) ein und bilden anschließend den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$, so erhalten wir die bezüglich u und v symmetrische Ungleichung

$$\int_{\mathcal{G}} \left\{ |u(x,t) - v(x,t)| w_t(x,t) + \operatorname{sign}(u(x,t) - v(x,t)) \left(Q(u(x,t)) - Q(v(x,t)) \right) w_x(x,t) \right\} dx dt \geq 0 \quad (1.10.26)$$

für alle Testfunktionen $w \geq 0$, $w \in C_0^\infty(\mathcal{G} \wedge t > 0)$.

Um aus dieser Ungleichung schließlich die Behauptung zu erzielen, werden wir nun Testfunktionen w wählen, die Dirac-Funktionale auf den Geraden $t = \rho$ und $t = \tau > \rho$ approximieren. Dazu wählen wir die Approximationen der Heaviside-Funktionen

$$\alpha_\varepsilon(\sigma) := \int_{-\infty}^{\sigma} \delta_\varepsilon(s) ds \quad \text{und} \quad \chi_\varepsilon(x,t) := 1 - \alpha_\varepsilon(|x| + Nt - R + \varepsilon),$$

für die $\alpha_\varepsilon(\sigma) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma > 0, \\ 0 & \text{für } \sigma < 0 \end{cases}$, und $\chi_\varepsilon(x,t) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{für } |x| + Nt - R < 0, \\ 0 & \text{für } |x| + Nt - R > 0 \end{cases}$, mit $\varepsilon \rightarrow 0$ punktweise gilt. Außerdem gelten $0 \leq \alpha_\varepsilon \leq 1$ und $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$.

Für die Testfunktionenfamilie

$$w_{h,\varepsilon}(x,t) := (\alpha_h(t - \rho) - \alpha_h(t - \tau)) \chi_\varepsilon(x,t)$$

zu $h > 0$ und $\varepsilon > 0$ haben wir $w_{h,\varepsilon} \geq 0$ wegen $\rho < \tau$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= (\delta_h(t - \rho) - \delta_h(t - \tau)) \chi_\varepsilon(x,t) + (\alpha_h(t - \rho) - \alpha_h(t - \tau)) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= (\alpha_h(t - \rho) - \alpha_h(t - \tau)) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial t} &= -\delta_\varepsilon(|x| + Nt - R + \varepsilon) N \leq 0, \\ \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x} &= -\delta_\varepsilon(|x| + Nt - R + \varepsilon) \frac{x}{|x|}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann wegen $N = \max_{|u| \leq M} |Q'(u)|$

$$\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial t} + \frac{Q(u) - Q(v)}{u - v} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x} \leq \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial t} + N \left| \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x} \right| = \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial t} + \left| \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial t} \right| = 0.$$

Setzen wir nun $w_{h,\varepsilon}$ in (1.10.26) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathcal{G}} |u(x,t) - v(x,t)| \left\{ (\delta_h(t - \rho) - \delta_h(t - \tau)) \chi_\varepsilon(x,t) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_h(t - \rho) - \alpha_h(t - \tau)) \left(\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial t} + \frac{Q(u(x,t)) - Q(v(x,t))}{u(x,t) - v(x,t)} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x} \right) \right\} dx dt \\ &\leq \int_{\mathcal{G}} (\delta_h(t - \rho) - \delta_h(t - \tau)) |u(x,t) - v(x,t)| \chi_\varepsilon(x,t) dx dt. \end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$; für $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich mit $T_0 := \min\{T, \frac{R}{N}\}$,

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{T_0} \delta_h(t - \tau) \int_{|x| < R - Nt} |u(x, t) - v(x, t)| dx dt \\ \leq \int_{t=0}^{T_0} \delta_h(t - \rho) \int_{|x| < R - Nt} |u(x, t) - v(x, t)| dx dt. \end{aligned}$$

Nun schicken wir $h \rightarrow 0$, und es ergibt sich für $0 < \rho < \tau$ die Ungleichung

$$\int_{|x| \leq R - N\tau} |u(x, \tau) - v(x, \tau)| dx \leq \int_{|x| \leq R - N\rho} |u(x, \rho) - v(x, \rho)| dx, \quad (1.10.27)$$

solange τ und ρ nicht zu den Ausnahmemengen \mathcal{E}_u und \mathcal{E}_v der Lösungen gehören, für die eines dieser Integrale nicht existiert, und solange für die meßbare Funktion

$$\mu(t) := \int_{|x| \leq R - Nt} |u(x, t) - v(x, t)| dx$$

die Zeiten τ und ρ Lebesgue-Punkte sind. Diese bezeichnen wir mit \mathcal{L} . Sie sind durch

$$\mathcal{L} := \{t_0 \geq 0 \mid \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{|t - t_0| \leq \varepsilon} |\mu(t) - \mu(t_0)| dt = 0\}$$

definiert. Nach Voraussetzung sind \mathcal{E}_u und \mathcal{E}_v Nullmengen, und wegen der Meßbarkeit und Beschränktheit von u und v ist auch $[0, T] \setminus \mathcal{L}$ eine Nullmenge. Also gilt (1.10.27) für fast alle $0 < \rho < \tau \leq T_0$, und wir können für ρ eine Nullfolge wählen. Wegen

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|x| \leq R - N\rho} |u(x, \rho) - u_0(x)| dx = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|x| \leq R - N\rho} |v(x, \rho) - v_0(x)| dx = 0$$

ergibt sich aus (1.10.27) schon die behauptete Ungleichung

$$\int_{|x| \leq R - N\tau} |u(x, \tau) - v(x, \tau)| dx \leq \int_{|x| \leq R} |u_0(x) - v_0(x)| dx.$$

für fast alle $\tau \in (0, T_0]$. □

Die Ungleichung (1.10.24) gilt natürlich auch für $R = \infty$.

Aufgabe 23: Man beweise Satz 1.10.4.

Aufgabe 24: Man beweise Lemma 1.10.8.

Aufgabe 25: Man zeige, daß für $Q'' > 0$ und $\frac{du_0}{dx} \geq 0$ die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems

$$u_t + (Q(u))_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad |u_0| \leq M$$

für $t > 0$ eine Ungleichung

$$\frac{u_r - u_\ell}{\delta} \leq \frac{E}{t}$$

mit $u_r = u(x + \delta, t)$, $\delta > 0$, $u_\ell = u(x - \delta, t)$ und einer geeigneten Konstanten E erfüllt, die sogenannte verschärfte Entropiebedingung von Lax.

1.11 Die Lösungskonstruktion mit der Methode der verallgemeinerten Charakteristiken nach Dafermos

Wir werden nun nach Dafermos [40, 41] eine einfache Lösungskonstruktion der Entropielösung mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens aufbauen. Dabei folgen wir i.w. den Arbeiten von M. Kunik [84, 85] und K.S. Cheng [30]. Zunächst führen wir eine von Ort, Zeit und Zustand abhängige Funktion \mathcal{M} ein:

$$\mathcal{M}(x,t;\varphi) := \int_0^\varphi Q''(z)\{z - f(x - tQ'(z))\}dz. \quad (1.11.1)$$

Dabei ist $f(x) = u(x,0)$ die vorgegebene Anfangsfunktion, die wir hier beschränkt und stetig differenzierbar annehmen wollen. (Wir weisen darauf hin, daß alle Überlegungen dieses Abschnitts nach [84, 85] für Anfangsdaten f beschränkter Totalvariation modifiziert werden können.)

Für eine Flußfunktion mit $Q'' > 0$ wird sich herausstellen, daß eine durch

$$u(x,t) \in \Lambda(x,t) = \overline{\Lambda(x,t)} \quad (1.11.2)$$

mit Hilfe der Minimalmenge

$$\Lambda(x,t) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathcal{M}(x,t;\lambda) = \min_{|\varphi| \leq 2\|f\|_{L^\infty}} \mathcal{M}(x,t;\varphi)\} \quad (1.11.3)$$

definierte Funktion fast überall mit der einzigen Entropielösung beschränkter Totalvariation übereinstimmt.

Man beachte, daß $\Lambda(x,t)$ für jeden Punkt (x,t) für $t \geq 0$ nach (1.11.3) wohldefiniert ist, so daß im Folgenden die Eigenschaften von $\Lambda(x,t)$ einschließlich der Lösung des Cauchy-Problems zu zeigen sind. Dazu setzen wir wieder $Q'' > 0$ voraus.

Die Lösungskonstruktion (1.11.3) kann zu einem wirksamen Berechnungsverfahren ausgebaut werden — leider bleibt diese Konstruktion nur auf eine skalare Erhaltungsgleichung beschränkt.

Bemerkung: Für $u \in \Lambda$ ist die Gerade

$$\xi(\tau) = x - (t - \tau)Q'(u) \quad (1.11.4)$$

für $\tau \leq t$ die Projektion der Charakteristik durch (x,t,u) in die x - t -Ebene.

1.11.1 Lemma: Für $t = 0$ gilt $\Lambda(x,0) = \{f(x)\}$.

Beweis: Für $t = 0$ und $|\lambda| < 2\|f\|_{L^\infty}$ wird das Extremum im Innern des Intervalls $[-2\|f\|_{L^\infty}, 2\|f\|_{L^\infty}]$ angenommen, denn wegen $Q'' > 0$ ergeben sich außerdem die Ungleichungen

$$\mathcal{M}(x,0;\pm 2\|f\|_{L^\infty}) \geq \mathcal{M}(x,0;\pm\|f\|_{L^\infty}) \geq \mathcal{M}(x,0,f(x)).$$

Folglich gilt dort

$$\left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi \in \Lambda} = Q''(\varphi)[\varphi - f(x)] = 0 \quad (1.11.5)$$

und somit

$$\varphi = f(x).$$

□

1.11.2 Lemma: v sei lokales Minimum von $\mathcal{M}(x,t;\varphi)$ für $t > 0$. Dann gilt

$$v = f(x - tQ'(v)) = \Lambda(x - tQ'(v), 0) = u(x - tQ'(v), 0). \quad (1.11.6)$$

Beweis: Da v lokales Minimum sein soll, gilt dort

$$\left. \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \varphi} \right|_v = Q''(v)[v - f(x - tQ'(v))] = 0,$$

woraus mit $Q'' > 0$ und Lemma 1.11.1 die Gleichung (1.11.6) folgt. □

1.11.3 Satz: Sei $v \in \Lambda$ und $0 \leq \tau < t$. Dann gilt für $\xi(\tau) = x - (t - \tau)Q'(v)$:

$$\mathcal{M}(\xi(\tau), \tau; \Lambda) = \mathcal{M}(\xi(\tau), \tau; v) \text{ bzw. } \Lambda(\xi(\tau), \tau) = \{v\}. \quad (1.11.7)$$

Auf dem Geradenstück $(\xi(\tau), \tau)$ nimmt also \mathcal{M} sein Minimum eindeutig an!

Beweis: Nach Voraussetzung existieren die beiden Schranken

$$-\infty < f_1 := \inf_{x \in \mathbb{R}} \{f(x)\} \leq f_2 := \sup_{x \in \mathbb{R}} \{f(x)\} < \infty.$$

Seien $v \in \Lambda(x,t)$ und $\psi \in [f_1, f_2]$.

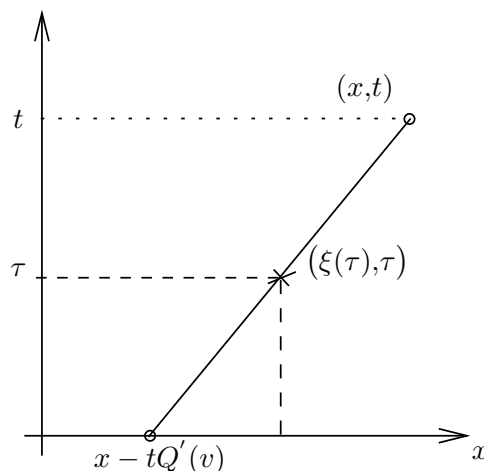


Bild 29: Charakteristik zu gegebenem Minimalwert v

Dann gilt mit $\xi(\tau) := x - (t - \tau)Q'(v)$:

$$\delta\mathcal{M} := \mathcal{M}(\xi(\tau), \tau, \psi) - \mathcal{M}(\xi(\tau), \tau, v) = \int_v^\psi Q''(z)[z - f(\xi(\tau) - \tau Q'(z))]dz.$$

Das Integral versuchen wir mit einer neuen Integrationsveränderlichen $y > 0$ so umzuformen, daß wir schließlich die Minimum-Eigenschaft von $\mathcal{M}(x, t, v)$ nutzen können, indem wir y durch die Beziehung

$$x - tQ'(y) = \xi(\tau) - \tau Q'(z) = x - (t - \tau)Q'(v) - \tau Q'(z)$$

definieren. Da nach Voraussetzung $Q'(z)$ streng monoton wachsend ist, existiert die inverse Abbildung g zu Q' mit

$$Q' \circ g(\chi) = \chi \quad \text{und} \quad g \circ Q'(z) = z$$

und ist ebenfalls streng monoton wachsend. Somit gelten

$$y(z) = g\left(\left(1 - \frac{\tau}{t}\right)Q'(v) + \frac{\tau}{t}Q'(z)\right) \quad \text{und} \quad y(v) = v. \quad (1.11.8)$$

Für festes $\tau \in (0, t)$ ist dann auch y streng monoton wachsend in z , und es gilt für die inverse Abbildung

$$z(y) = g\left(\left(\frac{t}{\tau} - 1\right)(Q'(y) - Q'(v)) + Q'(y)\right).$$

Damit transformiert sich das Integral:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M} &= \int_v^{y(\psi)} Q''(z(y))[z(y) - f(x - tQ'(y))]\frac{dz}{dy}dy \\ &= \int_v^{y(\psi)} \left\{ \frac{d}{dy}Q'(z(y)) \right\} [z(y) - f(x - tQ'(y))]dy. \end{aligned}$$

Wegen

$$Q'(z) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)Q'(v) + \frac{t}{\tau}Q'(y)$$

gilt

$$\frac{d}{dy}Q'(z(y)) = \frac{t}{\tau}Q''(y),$$

so daß wir schließlich erhalten:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M} &= \frac{t}{\tau} \int_v^{y(\psi)} Q''(y)[z(y) - y]dy + \frac{t}{\tau} \int_v^{y(\psi)} Q''(y)[y - f(x - tQ'(y))]dy \\ &= \frac{t}{\tau} \int_v^{y(\psi)} Q''(y)[z(y) - y]dy + \frac{t}{\tau} \{ \mathcal{M}(x, t; y(\psi)) - \mathcal{M}(x, t; v) \} \\ &\geq \frac{t}{\tau} \int_v^{y(\psi)} Q''(y)[z(y) - y]dy, \end{aligned}$$

denn es gilt $\mathcal{M}(x,t;y(\psi)) \geq \mathcal{M}(x,t;v)$ wegen $v \in \Lambda(x,t)$.

i) Sei $\psi < v$: Dann gilt nach (1.11.8)

$$y(\psi) < y(v) = v, \text{ d.h. } y(\psi) < y < v$$

in obigem Integral. Folglich ist $Q'(y) - Q'(v) < 0$ und wegen der strengen Monotonie von g :

$$z(y) - y = g\left(Q'(y) + \left(\frac{t}{\tau} - 1\right)(Q'(y) - Q'(v))\right) - y < (g \circ Q')(y) - y = 0.$$

Daraus folgt

$$\delta\mathcal{M} > 0.$$

ii) Sei $v < \psi$: Dann gilt, wiederum nach (1.11.8),

$$v < y < y(\psi)$$

und nun

$$z(y) - y = g\left(Q'(y) + \left(\frac{t}{\tau} - 1\right)(Q'(y) - Q'(v))\right) - y > 0.$$

Daraus ergibt sich wie vordem wieder

$$\delta\mathcal{M} > 0.$$

Also gilt (1.11.7). □

Von E. Hopf wurde in [65] nicht \mathcal{M} , sondern die **Hopfsche Funktion**

$$\mathcal{F}(x,t;\varphi) := t[\varphi Q'(\varphi) - Q(\varphi)] + \int_0^{x-tQ'(\varphi)} f(z)dz \quad (1.11.9)$$

benutzt. Der Zusammenhang zwischen \mathcal{F} und \mathcal{M} ergibt sich aus dem folgenden Lemma.

1.11.4 Lemma: *Es gilt für alle $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$:*

$$\mathcal{F}(x,t;\varphi) = t\mathcal{M}(x,t;\varphi) + \mathcal{F}(x,t;0). \quad (1.11.10)$$

Beweis: Aus (1.11.9) ergibt sich für die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} &= t\varphi Q''(\varphi) - tQ''(\varphi)f(x - tQ'(\varphi)) \\ &= tQ''(\varphi)\{\varphi - f(x - tQ'(\varphi))\} = t\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(t\mathcal{M}) = 0$$

und

$$\mathcal{F}(x,t;\varphi) - \mathcal{F}(x,t;0) = t\{\mathcal{M}(x,t;\varphi) - \mathcal{M}(x,t;0)\} = t\mathcal{M}(x,t;\varphi). \quad \square$$

1.11.5 Folgerung: \mathcal{F} und \mathcal{M} haben die gleiche Minimalmenge, d.h. mit $\Lambda(x,t)$ aus (1.11.3) gilt für alle $\lambda \in \Lambda(x,t)$:

$$\mathcal{F}(x,t;\lambda) = \min_{|\varphi| \leq 2\|f\|_{L^\infty}} \mathcal{F}(x,t;\varphi). \quad (1.11.11)$$

Da für fest gewähltes (x,t) mit $t > 0$ die Minima von \mathcal{M} und \mathcal{F} jeweils eindeutig definiert sind, können wir die Funktionen

$$\mathcal{F}_{\min}(x,t) := \mathcal{F}(x,t;\Lambda(x,t)) \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_{\min}(x,t) := \mathcal{M}(x,t;\Lambda(x,t)) \quad (1.11.12)$$

einführen.

1.11.6 Lemma: Die Funktionen $\mathcal{M}_{\min}(x,t)$ und $\mathcal{F}_{\min}(x,t)$ sind für $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ stetig. $\mathcal{F}_{\min}(x,t)$ ist sogar Lipschitz-stetig.

Beweis: Für zwei Wertpunkte $(x_1,t_1), (x_2,t_2)$ erhalten wir aus (1.11.1) für jedes $|\varphi| \leq 2\|f\|_{L^\infty}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |\mathcal{M}(x_1,t_1;\varphi) - \mathcal{M}(x_2,t_2;\varphi)| \\ & \leq \int_0^{2\|f\|_{L^\infty}} Q''(z) |f(x_1 - t_1 Q'(z)) - f(x_2 - t_2 Q'(z))| dz =: R(x_1,t_1;x_2,t_2). \end{aligned}$$

Wählen wir $\varphi = \lambda_2 \in \Lambda(x_2,t_2)$, so folgt daraus insbesondere

$$\mathcal{M}(x_1,t_1;\lambda_2) - \mathcal{M}(x_2,t_2;\lambda_2) \leq R(x_1,t_1;x_2,t_2),$$

also auch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\min}(x_1,t_1) - \mathcal{M}_{\min}(x_2,t_2) & \leq \mathcal{M}(x_1,t_1;\lambda_2) - \mathcal{M}(x_2,t_2;\lambda_2) \\ & \leq R(x_1,t_1;x_2,t_2). \end{aligned}$$

Für $(x_1,t_1) \rightarrow (x_2,t_2)$ strebt R gegen Null, da der Integrand gegen Null strebt. Also ist \mathcal{M}_{\min} stetig.

Für \mathcal{F} ergibt sich entsprechend für alle $|\varphi| \leq 2\|f\|_{L^\infty}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}(x_1,t_1;\varphi) - \mathcal{F}(x_2,t_2;\varphi)| \\ & = |(t_1 - t_2)[\varphi Q'(\varphi) - Q(\varphi)] + \int_{x_1 - t_1 Q'(\varphi)}^{x_2 - t_2 Q'(\varphi)} f(z) dz| \\ & \leq c_1 |t_1 - t_2| + \|f\|_{L^\infty} \{|x_2 - x_1| + c_2 |t_2 - t_1|\}, \end{aligned}$$

wobei sich c_1 und c_2 aus $\max_{|\varphi| \leq 2\|f\|_{L^\infty}} |Q'(\varphi)|$ und $\max_{|\varphi| \leq 2\|f\|_{L^\infty}} |Q(\varphi)|$ berechnen. Also erhalten wir hier mit einer Konstanten $c(\|f\|_{L^\infty})$ die Abschätzung

$$|\mathcal{F}_{\min}(x_1, t_1) - \mathcal{F}_{\min}(x_2, t_2)| \leq c(\|f\|_{L_\infty})\{|x_2 - x_1| + |t_2 - t_1|\}, \quad (1.11.13)$$

d.h. die behauptete Lipschitz–Stetigkeit. \square

1.11.7 Satz: Sei Q strikt konvex, d.h. $Q'' > 0$.

i) Dann ist für $u(x, t) \in \Lambda(x, t)$ die Funktion

$$\lambda_t(x) := x - tQ'(u(x, t)) \quad (1.11.14)$$

bei festem $t > 0$ in x monoton wachsend. Die Funktion $u(\cdot, t)$ ist auf jedem Kompaktum $[a, b]$ von beschränkter Totalvariation bezüglich x .

ii) Für festes $t > 0$ existieren die Grenzwerte

$$u_\ell(x, t) = \lim_{\xi \rightarrow x-0} u(\xi, t) \quad \text{und} \quad u_r(x, t) = \lim_{\xi \rightarrow x+0} u(\xi, t). \quad (1.11.15)$$

Außerdem gilt das Verschärfte Lax–Kriterium (1.10.19) in der Form

$$u_\ell = \max \Lambda(x, t) \geq \min \Lambda(x, t) = u_r. \quad (1.11.16)$$

iii) Bei festem $t > 0$ hat $u(x, t)$ nur höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen:

$$\{\xi \mid u_\ell(\xi, t) > u_r(\xi, t)\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}'} \xi_k \quad \text{mit} \quad \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N} \quad \text{oder} \quad = \emptyset. \quad (1.11.17)$$

Beweis: i) Bei beliebig, fest gewähltem $t > 0$ betrachten wir zwei Punkte mit $x_1 < x_2$ und $u_1 \in \Lambda(x_1, t)$, $u_2 \in \Lambda(x_2, t)$. Aufgrund von Satz 1.11.3 und Lemma 1.11.6 gelten dann wegen $t > 0$:

$$u_1 = f(x_1 - tQ'(u_1)) \quad \text{und} \quad u_2 = f(x_2 - tQ'(u_2)).$$

Falls $u_2 > u_1$ erfüllt ist, gilt $Q'(u_2) > Q'(u_1)$. Ist in diesem Falle auch noch

$$\lambda_t(x_2) = x_2 - tQ'(u_2) < \lambda_t(x_1) = x_1 - tQ'(u_1)$$

erfüllt, so haben die beiden Geraden

$$\xi_1(\tau) = x_1 - (t - \tau)Q'(u_1) \quad \text{und} \quad \xi_2(\tau) = x_2 - (t - \tau)Q'(u_2)$$

einen Schnittpunkt $\xi = \xi_1(\tau_0) = \xi_2(\tau_0)$ mit $0 < \tau_0 < t$. (Siehe Bild 30).

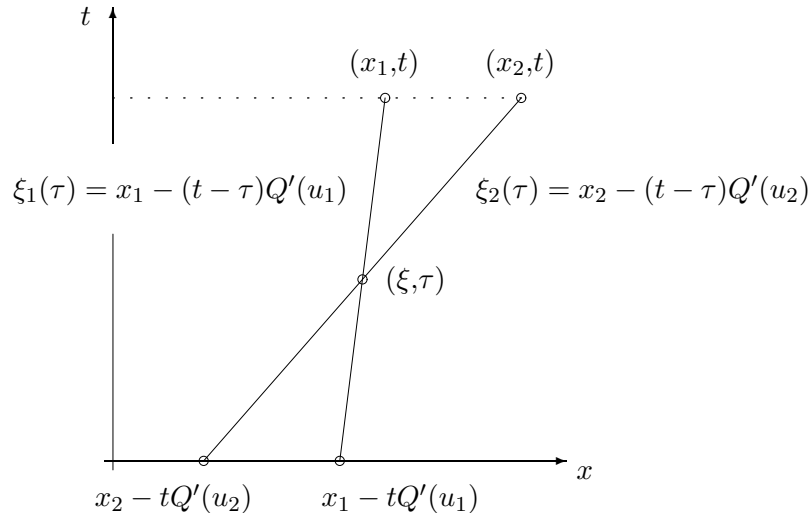


Bild 30: Charakteristiken $\xi_1(\tau)$, $\xi_2(\tau)$.

Dort ist nach Satz 1.11.3

$$\Lambda(\xi(\tau_0), \tau_0) = \{v\} = \{u_1\} = \{u_2\}$$

im Gegensatz zu $u_2 > u_1$. Also gilt für diesen Fall $\lambda_t(x_2) \geq \lambda_t(x_1)$.

Für $u_2 \leq u_1$ gilt $Q'(u_2) \leq Q'(u_1)$, und wir haben hier

$$\lambda_t(x_2) = x_2 - tQ'(u_2) > x_1 - tQ'(u_1) = \lambda_t(x_1).$$

Damit ist die Monotonie gezeigt.

Mit der Funktion $\lambda_t(x)$ in (1.11.14) und der Inversen g zu Q' folgt dann für $t > 0$ die Darstellung der Funktion u als

$$u(x, t) = g\left(\frac{x - \lambda_t(x)}{t}\right). \quad (1.11.18)$$

Folglich gilt für irgendeine Zerlegung \mathcal{Z}_x von $[a, b]$ und $x_{k-1}, x_k \in \mathcal{Z}_x$:

$$u(x_k, t) - u(x_{k-1}, t) = g'(\zeta_k) \frac{1}{t} ((x_k - x_{k-1}) - (\lambda_t(x_k) - \lambda_t(x_{k-1})))$$

und wegen der Monotonie von $\lambda_t(x)$ sowie $g'(\zeta_k) = \frac{1}{Q''(g(\zeta_k))}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K |u(x_k, t) - u(x_{k-1}, t)| &\leq c_1(t, a, b) + c_2(t, a, b) \sum_{k=1}^K (\lambda_t(x_k) - \lambda_t(x_{k-1})) \\ &\leq c_1(t, a, b) + c_2(t, a, b) (\lambda_t(b) - \lambda_t(a)) = c_3, \end{aligned}$$

da die Summen Teleskopsummen sind, wobei c_3 nicht von der speziellen Zerlegung \mathcal{Z}_x abhängt.

Demnach gilt für die Totalvariation von u

$$\|u(\bullet, t)\|_{BV[a, b]} \leq c_3.$$

ii) Bei festem t hat $u(x, t)$ als Funktion beschränkter Totalvariation die Darstellung

$$u = u_1 - u_2,$$

wobei u_1 und u_2 monoton wachsend und beschränkt sind. Die Funktion u ist also insbesondere eine Regelfunktion. Also existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte u_ℓ und u_r in (1.11.15).

Sei nun $\xi > x$. Dann gilt

$$\lambda_t(\xi) = \xi - tQ'(u(\xi, t)) \geq x - tQ'(u(x, t)) = \lambda_t(x).$$

Für $\xi \rightarrow x + 0$ ergibt sich daraus

$$Q'(u_r(x, t)) = \lim_{\xi \rightarrow x+0} u(\xi, t) \leq Q'(u(x, t)),$$

und dies impliziert wegen der Monotonie von Q' :

$$u_r(x,t) = \lim_{\xi \rightarrow x+0} u(\xi,t) \leq u(x,t) \in \Lambda.$$

Andererseits folgt hieraus und aus der Stetigkeit von $\mathcal{M}_{\min}(x,t)$:

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \mathcal{M}_{\min}(\xi,t) = \mathcal{M}_{\min}(x,t) = \lim_{\xi \rightarrow x} \mathcal{M}(\xi,t; u(\xi,t)) = \mathcal{M}(x,t,u_r).$$

Also gilt auch $u_r(x,t) \in \Lambda(x,t)$ nach Definition von Λ . Ganz entsprechend zeigt man für den Grenzwert von links $u_\ell(x,t) \in \Lambda(x,t)$.

iii) Die Behauptung (1.11.17) folgt aus (1.11.15), denn $u(x,t)$ ist bei festem t eine Regelfunktion bezüglich x und hat deshalb höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen ξ_k (siehe [121] Bd.I, S. 131 Aufgabe 14). \square

1.11.8 Korollar: Sei $Q'' \geq \varepsilon_0 > 0$. Dann gilt für $t > 0$ und jedes $\delta > 0$ die Ungleichung

$$u(x + \delta, t) - u_\ell(x, t) \leq \frac{\delta}{\varepsilon_0 \cdot t}. \quad (1.11.19)$$

Beweis: Mit $x = x_{k-1}$ und $\delta = x_k - x$ liefert Gleichung (1.11.18) mit dem Mittelwertsatz und der Monotonie von $\lambda_t(x)$:

$$u(x + \delta, t) - u_\ell(x, t) = \frac{1}{Q''(\zeta_k)} \frac{1}{t} (\delta - (\lambda_t(x_k) - \lambda_t(x_{k-1}))) \leq \frac{\delta}{\varepsilon_0 \cdot t}. \quad \square$$

1.11.9 Satz [83] : Seien u_1 und u_2 die beiden „Funktionen“ aus Satz 1.11.7 zu $f_1 < f_2$ mit $u_1(x,0) = f_1(x)$ und $u_2(x,0) = f_2(x)$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $t > 0$ auch

$$u_1(x,t) \leq u_2(x,t). \quad (1.11.20)$$

Beweis: Es gilt

$$\mathcal{M}_1(x,t; u_1) = \int_0^{u_1} Q''(z)[z - f_1(x - tQ'(z))]dz \leq \int_0^{u_2} Q''(z)[z - f_1(x - tQ'(z))]dz,$$

für jeden Zustand u_2 , denn \mathcal{M}_1 nimmt in u_1 sein Minimum an. Folglich erhalten wir

$$\int_{u_1}^{u_2} Q''(z)[z - f_1(x - tQ'(z))]dz \geq 0$$

und ganz entsprechend

$$\int_{u_2}^{u_1} Q''(z)[z - f_2(x - tQ'(z))]dz \geq 0.$$

Beide Ungleichungen zusammen implizieren

$$\int_{u_1}^{u_2} Q''(z) \{f_2(x - tQ'(z)) - f_1(x - tQ'(z))\} dz \geq 0,$$

und da der Integrand aufgrund unserer Voraussetzungen strikt positiv ist, muß $u_2 \geq u_1$ gelten. \square

Satz 1.11.9 stellt die **Eindeutigkeit** sicher. Denn ist u und v jeweils „Lösung“ zu (1.9.11), dann gelten wegen $f_1 = f_2 = f : u \leq v \leq u$ für jedes (x, t) .

Satz 1.11.3 erlaubt die folgende Definition, da $\xi(\tau) = x - (t - \tau)Q'(u)$ für $u \in \Lambda(x, t)$ und $0 \leq \tau < t$ wohldefinierte Charakteristik ist, die keine andere mehr schneidet:

$$K(x, t) := \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \tau < t \wedge Q'(u_r) \leq \frac{x - \xi}{t - \tau} \leq Q'(u_\ell)\} \quad (1.11.21)$$

heißt **charakteristischer Kegel** zu (x, t) . Entsprechend gilt dann für das **Einflußgebiet**

$$I(x, t) := \{\xi \in \mathbb{R} \mid x - tQ'(u_\ell) \leq \xi \leq x - tQ'(u_r)\}. \quad (1.11.22)$$

Die beiden Charakteristiken $\xi_\ell(x, t)(\tau) = x - (t - \tau)Q'(u_\ell)$ und $\xi_r(x, t)(\tau) = x - (t - \tau)Q'(u_r)$ sind die extremalen Randcharakteristiken von K , zwischen denen alle anderen verlaufen. (Siehe Bild 31.)

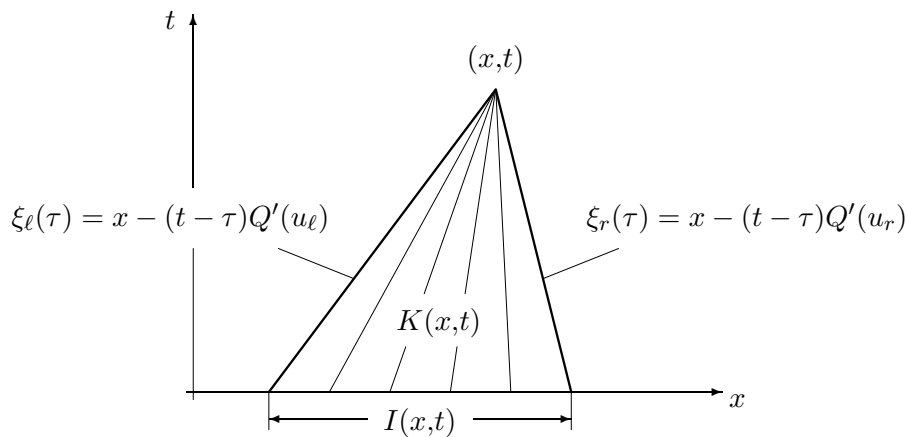


Bild 31: Charakteristischer Kegel und Einflußgebiet

1.11.10 Satz: Sei $Q'' > 0$ und seien x_0 und t_0 gegeben. Dann existiert zu $t_1 \geq t_0 > 0$ genau ein $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $K(x_0, t_0) \subseteq K(x_1, t_1)$.

Beweis: Es seien

$$y_1 := \inf \{y \mid y - t_1 Q'(u_r(y, t_1)) \geq x_0 - t_0 Q'(u_r(x_0, t_0))\},$$

und
$$y_2 := \sup \{y \mid y - t_1 Q'(u_\ell(y, t_1)) \leq x_0 - t_0 Q'(u_\ell(x_0, t_0))\}.$$

Für den Limes von oben $y \rightarrow y_1 + 0$ ist $u_r(y, t_1)$ monoton steigend und konvergent:

$$u_r(y_1, t_1) = \lim_{y \rightarrow y_1+0} u_r(y, t_1) \in \Lambda(y_1, t_1)$$

Entsprechend gilt für den Limes von unten $y \rightarrow y_2 - 0$, daß $u_\ell(y, t_1)$ monoton fällt und folglich konvergiert:

$$u_\ell(y_2, t_1) = \lim_{y \rightarrow y_2-0} u_\ell(y, t_1) \in \Lambda(y_2, t_1).$$

Außerdem gilt nach (1.11.16)

$$u_\ell \geq u_r.$$

Folglich sind

$$\begin{aligned} y_1 - t_1 Q'(u_r(y_1, t_1)) &\geq x_0 - t_0 Q'(u_r(x_0, t_0)), \\ y_2 - t_1 Q'(u_\ell(y_2, t_1)) &\leq x_0 - t_0 Q'(u_\ell(x_0, t_0)) \end{aligned}$$

erfüllt. Daraus folgt wegen $Q'(u_r) \leq Q'(u_\ell)$ die Ungleichung

$$\lambda_{t_1}(y_1) = y_1 - t_1 Q'(u_r(y_1, t_1)) \geq \lambda_{t_1}(y_2) = y_2 - t_1 Q'(u_\ell(y_2, t_1))$$

und daraus wegen der Monotonie von λ_t und Satz 1.11.7,

$$y_2 \leq x_1 \leq y_1 \quad \text{mit} \quad x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Wir zeigen nun $y_1 = y_2$.

Nehmen wir an, es sei $y_2 < y_1$ erfüllt. Dann gilt auch $y_2 < x_1 < y_1$, woraus

$$x_1 - t_1 Q'(u_r(x_1, t_1)) < x_0 - t_0 Q'(u_r(x_0, t_0))$$

folgt, denn andernfalls wäre $y_1 \leq x_1$ auf Grund der Definition von y_1 und damit auch $y_2 = y_1$. Ebenso gilt

$$x_0 - t_0 Q'(u_\ell(x_0, t_0)) < x_1 - t_1 Q'(u_\ell(x_1, t_1)),$$

denn sonst wäre $x_1 \leq y_2$ auf Grund der Definition von y_2 und wieder $y_1 = y_2$. Also gibt es einen Schnittpunkt (x_*, t_*) mit $t_* < t_0$ und $t_* < t_1$, zu dem zwei Lösungswerte im Widerspruch zu Satz 1.11.3 gehören würden.

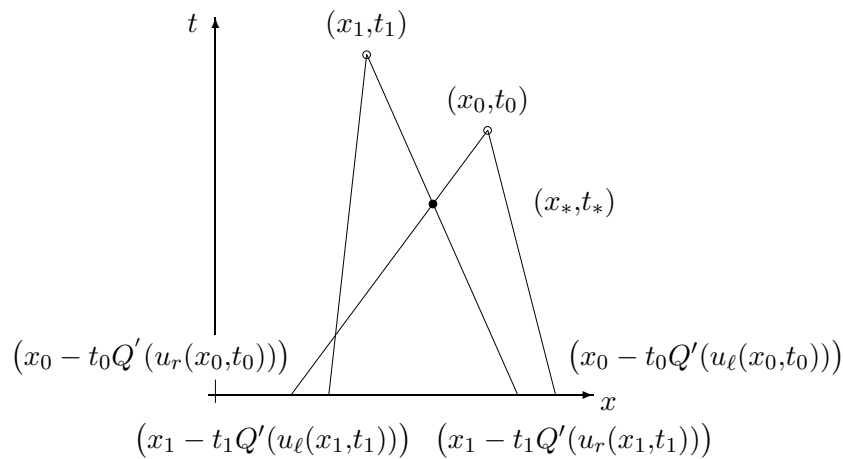


Bild 32: Charakteristische Dreiecke im Falle $y_2 < x_1 < y_1$.

Auch aus der zweiten Ungleichung

$$x_1 - t_1 Q'(u_\ell(x_1, t_1)) > x_0 - t_0 Q'(u_\ell(x_0, t_0))$$

erhält man einen Schnittpunkt mit zwei Lösungswerten.

Also muß $x_1 = y_1 = y_2$ richtig sein, d.h. x_1 ist eindeutig bestimmt. \square

Folgerung: Aus Satz 1.11.10 folgt für $t_1 \geq T_0$ für die Einflußgebiete

$$I(x_0, t_0) \subseteq I(x_1, t_1).$$

Mit Hilfe von Satz 1.11.10 definieren wir nun eine Verallgemeinerung der Charakteristiken.

Definition:

$$\text{Für } t \geq t_0 > 0 \text{ heißt } x = \gamma(t) \text{ mit } K(x_0, t_0) \subseteq K(\gamma(t), t) \quad (1.11.23)$$

die **verallgemeinerte Charakteristik**.

1.11.11 Satz: Sei $Q'' > 0$. Dann ist $u(x, t) \in \Lambda(x, t)$ für $T_0 > 0$ bei festem x von beschränkter Totalvariation bezüglich t auf $[0, T_0]$.

Beweis: Der Beweis erfolgt in drei Schritten.

Dazu sei $c \in \mathbb{R}$ die Nullstelle von $Q'(u)$, falls Q' das Vorzeichen wechselt. Dann ist $Q'(v) > 0$ für $v > c$ und $Q'(v) < 0$ für $v < c$.

i) Wir betrachten zunächst $f(x) \geq c$. Sei erst $f(x) > c$. Dann ist $Q'(u) > 0$, da für jedes $u \in \Lambda(x, t)$ gilt: $u = f(x - tQ'(u))$. Wenn Stöße auftreten, gilt wegen der Rankine–Hugoniot–Bedingung (1.9.25) $\frac{d\Sigma}{dt} > 0$ und folglich am Stoß wegen (1.11.16) $u(x, t + \delta t) > u(x, t)$ für $\delta t > 0$. Außerdem ergibt sich für eine beliebige Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T_0$ von $[0, T_0]$ wegen Satz 1.11.10:

$$x - T_0 \cdot \max_{|v| \leq 2\|f\|_{L^\infty}} Q'(v) \leq \lambda_{t_M} \leq \dots \leq \lambda_{t_{j+1}} \leq \lambda_{t_j} \leq \dots \leq \lambda_0 = x;$$

dies ist eine Zerlegung auf der x -Achse! (Sie Bild 33.) Also haben wir

$$\sum_{j=0}^{M-1} |u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)| = \sum |f(\lambda_{t_{j+1}}(x)) - f(\lambda_{t_j}(x))| \leq \|f\|_{BV([x - T_0 \max Q', x])},$$

unsere Behauptung für $f(x) > c$.

Ist $f(x) = c$, so ist $u = c$, und die Ungleichung gilt trivialerweise, denn auf der linken Seite steht Null.

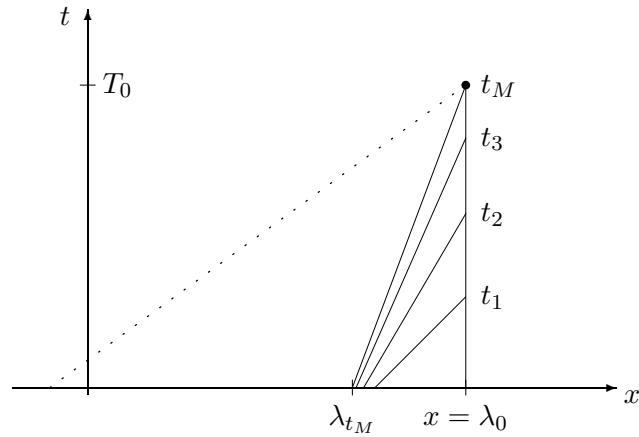


Bild 33: Zeitliche und räumliche Zerlegung

- ii) Ist $f(x) \leq c$, so erhalten wir analog die Zerlegung auf der Anfangsachse: $x = \lambda_0(x) \leq \lambda_{t_1}(x) \leq \dots \leq \lambda_{t_M}(x) \leq x + T_0 \cdot \max |Q'(v)|$, also wieder

$$\|u(x, \bullet)\|_{BV([0, T_0])} \leq \|f\|_{BV([x, x+T_0 \max |Q'|])}.$$

- iii) OBdA. untersuchen wir nun $u(0, t)$. Dann zerlegen wir:

$$u^+ := \max\{u(x, t), c\}, \quad u^- := \min\{u(x, t), c\},$$

sowie

$$f^+(x) := \max\{f(x), c\}, \quad f^-(x) := \min\{f(x), c\},$$

also

$$u = u^+ + u^- - c \quad \text{sowie} \quad f = f^+ + f^- - c.$$

Für $u \geq c$ haben wir $u(0, t) = f^+(-tQ'(u)) \geq c$, also $u = u^+$ und entsprechend $u = u^-$ für $u \leq c$.

Andererseits sind u^+ und u^- die jeweiligen Werte aus

$$\Lambda^+(x, t) = \{u \in \Lambda(x, t) \mid u \geq c\}$$

und

$$\Lambda^-(x, t) = \{u \in \Lambda(x, t) \mid u \leq c\},$$

und es gelten aufgrund von i) und ii):

$$\|u^+(0, \bullet)\|_{BV} \leq \|f^+\|_{BV}; \quad \|u^-(0, \bullet)\|_{BV} \leq \|f^-\|_{BV}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\|u(0, \bullet)\|_{BV} &= \|u^+(0, \bullet) + u^-(0, \bullet)\|_{BV} \\
&\leq \|u^+(0, \bullet)\|_{BV} + \|u^-(0, \bullet)\|_{BV} \\
&\leq \|f^+\|_{BV} + \|f^-\|_{BV} \leq 2\|f\|_{BV},
\end{aligned}$$

denn es gelten

$$\begin{aligned}
|f^+(x_{k+1}) - f^+(x_k)| &\leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \quad \text{und} \\
|f^-(x_{k+1}) - f^-(x_k)| &\leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)|
\end{aligned}$$

für jede Zerlegung. □

1.11.12 Lemma: Sei $x_0 \neq \xi_k$ aus Satz 1.11.7, d.h. keine Unstetigkeitsstelle von $u(x, t)$ bei festem t und sei $f(x)$ stetig. Dann gilt

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\min}}{\partial x}(x_0, t) = u(x_0, t). \quad (1.11.24)$$

Beweis: Sei $u \in \Lambda(x, t)$ und $u_0 \in \Lambda(x_0, t) = \{u_0\}$. Dann folgt aus der Definition in (1.11.9) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_{x_0 - tQ'(u)}^{x - tQ'(u)} f(z) dz &= \mathcal{F}(x, t; u) - \mathcal{F}(x_0, t; u) \\
&\leq \mathcal{F}(x, t; u) - \mathcal{F}(x_0, t; u_0) \\
&= \mathcal{F}_{\min}(x, t) - \mathcal{F}_{\min}(x_0, t) \\
&\leq \mathcal{F}(x, t; u_0) - \mathcal{F}(x_0, t; u_0) = \int_{x_0 - tQ'(u_0)}^{x - tQ'(u_0)} f(z) dz.
\end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert folglich für $x \neq x_0$

$$f(\xi^* - tQ'(u)) \leq \frac{\mathcal{F}_{\min}(x, t) - \mathcal{F}_{\min}(x_0, t)}{x - x_0} \leq f(\xi^{**} - tQ'(u_0))$$

mit geeigneten Stellen ξ^* , ξ^{**} zwischen x und x_0 . Für $x \rightarrow x_0 - 0$ gilt $u(x, t) \rightarrow u_\ell(x_0, t) = u_0$ und wegen der Stetigkeit von f :

$$f(x_0 - tQ'(u_0)) \leq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\mathcal{F}_{\min}(x, t) - \mathcal{F}_{\min}(x_0, t)}{x - x_0} \leq f(x_0 - tQ'(u_0)).$$

Demnach existiert die linksseitige Ableitung $\frac{\partial \mathcal{F}_{\min}}{\partial x^-}$.

Entsprechend ergibt sich mit $x \rightarrow x_0 + 0$ und $u(x, t) \rightarrow u_r(x_0, t) = u_0$ die rechtsseitige Ableitung mit dem gleichen Wert. Also existiert die Ableitung, und es gilt

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\min}}{\partial x}(x_0, t) = f(x_0 - tQ'(u_0)) = u(x_0, t). \quad \square$$

Definition: Das durch die beiden Geraden $\tau = t_1$ und $\tau = t_2 > t_1 \geq 0$ sowie die Charakteristiken

$$\xi_1(\tau) = x_1 - (t_2 - \tau)Q'(u(x_1, t_2)) \quad \text{und} \quad \xi_2(\tau) = x_2 - (t_2 - \tau)Q'(u(x_2, t_2))$$

berandete Trapez nennen wir **charakteristisches Trapez** (siehe auch Bild 34).

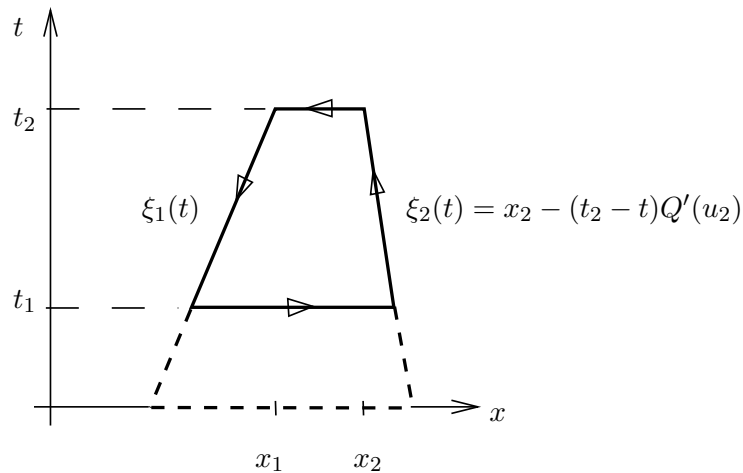


Bild 34: Charakteristisches Trapez

1.11.13 Lemma: Sei $Q'' > 0$. Dann gilt für jedes charakteristische Trapez T

$$I_T := \oint_{\partial T} (u dx - Q dt) = 0. \quad (1.11.25)$$

Beweis: Wir führen den Beweis für $t_1 = 0$. Dann gilt wegen (1.11.24) und der Stetigkeit von \mathcal{F}_{\min} :

$$\begin{aligned} I_{T_2} &= \mathcal{F}_{\min}(x_2 - t_2 Q'(u_2), 0) - \mathcal{F}_{\min}(x_1 - t_2 Q'(u_1), 0) \\ &+ \int_0^{t_2} (u_2 Q'(u_2) - Q(u_2)) d\tau - \int_0^{t_2} (u_1 Q'(u_1) - Q(u_1)) d\tau \\ &- \mathcal{F}_{\min}(x_2, t_2) + \mathcal{F}_{\min}(x_1, t_2). \end{aligned}$$

Nun verwenden wir (1.11.9) sowie die Tatsache, dass $u = u_1$ entlang $\xi_1(t)$ und $u = u_2$ entlang $\xi_2(t)$ konstant sind und erhalten

$$\begin{aligned}
I_{T_2} &= \int_{x_1 - t_2 Q'(u_1)}^{x_2 - t_2 Q'(u_2)} f(z) dz + t_2(u_2 Q'(u_2) - Q(u_2)) - t_2(u_1 Q'(u_1) - Q(u_1)) \\
&\quad - \int_{x_1 - t_2 Q'(u_1)}^{x_2 - t_2 Q'(u_2)} f(z) dz - t_2(u_2 Q'(u_2) - Q(u_2)) + t_2(u_1 Q'(u_1) - Q(u_1)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung sofort mit $T = T_2 - T_1$. \square

(1.11.25) gilt für *jedes* charakteristische Trapez, also auch für solche, die in charakteristische Kegel entarten.

1.11.14 Folgerung: Die Gleichung (1.11.25) für jedes charakteristische Trapez impliziert, daß u schwache Lösung ist. (Satz 1.9.4 für alle charakteristischen Trapeze statt Kugeln!) Des weiteren erfüllt u die verschärfte Laxsche Entropiebedingung $u_\ell \geq u_r$.

Folglich ist die von uns konstruierte Lösung u schwache Lösung beschränkter Totalvariation im Sinne von Cesari–Tonelli, erfüllt die Laxsche Entropiebedingung und ist die einzige Lösung im Kružkovschen Sinne.

1.12 Die diskretisierte Konstruktionsmethode nach M. Kunik

Kuniks Konstruktionsmethode [84] beruht auf der Idee, die Komposition der Flußfunktion mit den Anfangswerten, das heißt die **charakteristischen Richtungen**, durch stetige stückweise lineare Funktionen zu interpolieren.

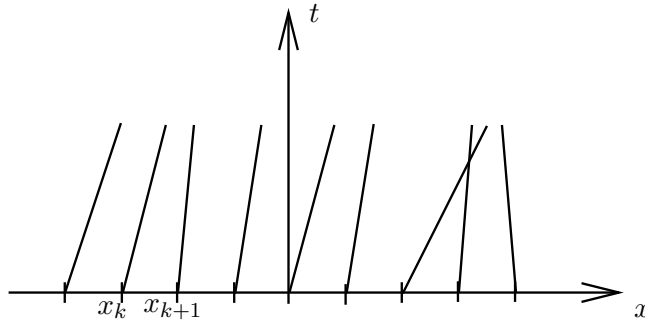


Bild 35: Die charakteristischen Richtungen $Q'(f(x_k))$ werden linear interpoliert.

1) Bestimme m_k und n_k , so dass die Gleichungen

$$\begin{aligned}
m_k x_k + n_k &= Q'(f(x_k)) \\
m_k x_{k+1} + n_k &= Q'(f(x_{k+1}))
\end{aligned}$$

gelten und definiere neue Anfangswerte $\tilde{f}(\xi)$ durch

$$m_k \xi + n_k = Q'(\tilde{f}(\xi)) \quad \text{für } x_k \leq \xi \leq x_{k+1}, \quad \text{d.h. } \tilde{f}(\xi) := g(m_k \xi + n_k) \quad (1.12.1)$$

mit der zu Q' inversen Funktion $g(\xi) = Q'^{(-1)}(\xi)$.

Zu der „neuen“ Anfangsbedingung f bestimmen wir nun $\tilde{\Lambda}$ bzw. \tilde{u} .

Für irgendeinen Punkt (x, t) mit $t > 0$ und $\tilde{u} \in \tilde{\Lambda}(x, t)$ gilt ja die Lösungsdarstellung

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{f}(x - tQ'(\tilde{u})) = g(m_k(x - tQ'(\tilde{u})) + n_k) \quad (1.12.2)$$

und damit

$$Q'(\tilde{u}) = m_k(x - tQ'(\tilde{u})) + n_k.$$

Diese Gleichung können wir nach $Q'(\tilde{u})$ auflösen und erhalten

$$Q'(\tilde{u}) = \frac{(m_k x + n_k)}{(1 + tm_k)}.$$

Also ist \tilde{u} für das richtige zugeordnete Einfluss-Intervall $I(x_k, x_{k+1})$ **bekannt**:

$$\tilde{u}(x, t) = g\left(\frac{m_k x + n_k}{1 + tm_k}\right). \quad (1.12.3)$$

Hat man also (x, t) mit $t > 0$ gewählt, so ist das Problem jetzt, das richtige Einflußintervall $I(x_k, x_{k+1})$ zu finden. Aber wir wissen, es gilt

$$\mathcal{F}(x, t; \tilde{u}) = \min_{k \in \mathcal{I}(x, t)} \mathcal{F}(x, t; \tilde{u}_k)$$

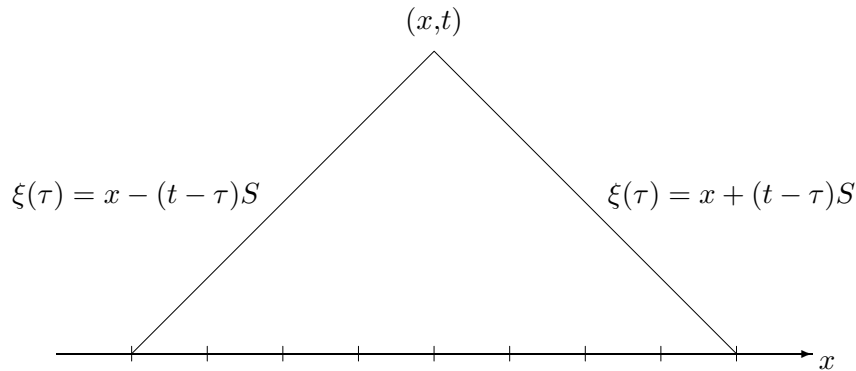


Bild 36: Die charakteristischen Richtungen $Q'(f(x_k))$ werden linear interpoliert

Hierbei ist $S := \max\{|Q'_{\max}|, |Q'_{\min}|\}$ und

$$Q'_{\max} = \sup_{x \in \mathbb{R}} Q'(f(x)), \quad Q'_{\min} = \inf_{x \in \mathbb{R}} Q'(f(x)).$$

Die Indexmenge $\mathcal{I}(x, t)$ definieren wir durch

$$\mathcal{I}(x, t) := \{k \in \mathbb{N} \mid x - tS \leq x_k \leq x + tS\}.$$

2) Demnach können wir \tilde{u} aus dem endlichdimensionalen Minimierungsproblem

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x,t; \tilde{u}) &= \min_{k \in \mathcal{I}(x,t)} \mathcal{F}(x,t; \tilde{u}_k(x,t)) \\
&= \min_{k \in \mathcal{I}(x,t)} \left\{ t \left[g\left(\frac{m_k x + n_k}{1 + tm_k}\right) \cdot \left(\frac{m_k x + n_k}{1 + tm_k}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - Q\left(g\left(\frac{m_k x + n_k}{1 + tm_k}\right)\right) \right] + I_k(x,t) \right\}
\end{aligned} \tag{1.12.4}$$

mit

$$I_k(x,t) := \int_{x_0}^{(x - tn_k)/(1 + tm_k)} \tilde{f}(\xi) d\xi$$

ermitteln, wobei wir $x - tQ'(\tilde{u}_k) = \frac{x - tn_k}{1 + tm_k}$ verwendet haben. Die Integrale $I_k(x,t)$ lassen sich erheblich vereinfachen. Dazu definieren wir den Index

$$M := \max \left\{ j \mid x_j \leq \frac{x - tn_k}{1 + tm_k} \right\}.$$

1.12.1 Lemma: Das Integral $I_k(x,t)$ läßt sich explizit ausdrücken durch

$$\begin{aligned}
I_k(x,t) &= \sum_{j=0}^{M-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(m_j \xi + n_j) d\xi + \int_{x_M}^{(x - tn_k)/(1 + tm_k)} g(m_M \xi + n_M) d\xi \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{m_j} \left\{ (m_j x_{j+1} + n_j) f(x_{j+1}) - Q(f(x_{j+1})) \right. \\
&\quad \left. - (m_j x_j + n_j) f(x_j) + Q(f(x_j)) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{m_M} \left\{ \left(m_M \frac{(x - tn_k)}{(1 + tm_k)} + n_M \right) \tilde{f}\left(\frac{x - tn_k}{1 + tm_k}\right) - Q\left(\tilde{f}\left(\frac{x - tn_k}{1 + tm_k}\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - (m_M x_M + n_M) f(x_M) + Q(f(x_M)) \right\}
\end{aligned} \tag{1.12.5}$$

Das bedeutet für (1.12.4), dass bei vorgegebenem Punkt (x,t) mit $t > 0$ nur endlich viele Werte $\mathcal{F}(x,t; \tilde{u}_k(x,t))$ für $k \in \mathcal{I}(x,t)$ miteinander zu vergleichen sind, die auch noch explizit durch bekannte Funktionen ausgedrückt werden. Das Verfahren ist deshalb **“superschnell”**.

Darüberhinaus gilt die folgende Fehlerabschätzung:

1.12.2 Folgerung: Für die Lösung \tilde{u} des Näherungsverfahrens gilt wegen des Satzes 1.10.9 von Kružkov die globale Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
\int_a^b |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| dx &\leq \int_{a-St}^{b+St} |f(\xi) - \tilde{f}(\xi)| d\xi \\
&\leq c(b - a + 2S \cdot t) \omega_f(\Delta_k x).
\end{aligned} \tag{1.12.6}$$

Hierbei ist ω_f der Stetigkeitsmodul von f .

Aufgabe 26: Man beweise Lemma 1.12.1. Dafür erweist sich die Beziehung $\frac{d}{ds} \{sg(s) - Q(g(s))\} = g(s)$ als nützlich.

1.13 Frontverfolgungsmethode (nach [64])

Diese Methode beruht im Gegensatz zu (1.12.1) auf der Idee, die **Flussfunktion** $Q(u)$ im Zustandsraum durch eine stetige lineare Interpolationsfunktion $\tilde{Q}(u)$ zu ersetzen und stückweise konstante Lösungen mit Hilfe des Oleinik'schen Entropiekriteriums, Satz 1.10.4, zu konstruieren. Die Approximation geht ebenfalls auf Dafermos zurück [39] .

Zur Erläuterung wählen wir das im Buch von Holden und Risebro [64] beschriebene **Beispiel**:

Man bestimme die stückweise stetige Lösung des Riemann-Problems

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Q(u(x,t))) &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = f(x) &= \begin{cases} 2 & \text{für } x < x_1, \\ -1 & \text{für } x_1 < x < x_2, \\ 1 & \text{für } x_2 < x \end{cases} \end{aligned} \quad (1.13.1)$$

mit der Flussfunktion

$$Q(u) = \begin{cases} -\frac{u}{2} & \text{für } u < 0, \\ \frac{u}{2} & \text{für } 0 \leq u \leq 1, \\ \frac{3}{2}u - 1 & \text{für } 1 < u. \end{cases} \quad (1.13.2)$$

Die Flussfunktion Q in (1.13.2) ist stückweise linear, stetig und konvex (aber nicht streng konvex).

Für eine **lineare** Flussfunktion

$$Q(u) = au + u_0 \quad (1.13.3)$$

können wir die Lösung auf Grund des Charakteristikenverfahrens in 1.3 sofort explizit angeben:

$$u(x,t) = f(x - at) \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}. \quad (1.13.4)$$

Da die Anfangsdaten stückweise konstant vorgegeben sind, erhalten wir in einer Umgebung der Anfangskurve eine stückweise konstante Lösung, die allerdings Sprünge entlang Stößen bzw. Unstetigkeitskurven aufweist. Für kleine $t > 0$ und $x < x_1$ ist die Lösung $u = u_\ell = 2$, in der Umgebung von x_1 und für $x > x_1$, $u = u_r = -1 < u_\ell = 2$. Folglich bildet sich ein Stoß mit der Geschwindigkeit $\Sigma_1 = (Q(u_\ell) - Q(u_r)) / (u_\ell - u_r) = \frac{1}{2} = \frac{d\xi}{dt}$; die Sekante zwischen $(u_\ell, Q(u_\ell))$ und $(u_r, Q(u_r))$ muss nach Satz 1.10.4 oberhalb $Q(u)$ verlaufen. (Siehe Bild 37.) Links des Stoßes $\xi(t) = a_1 + \frac{1}{2}t$ herrscht demnach der Zustand $u = 2$ und rechts desselben der Zustand $u = -1$.

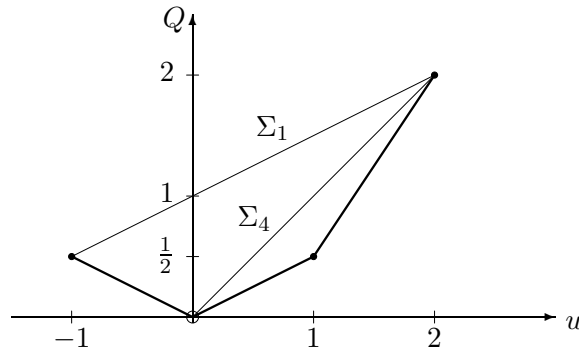


Bild 37: Stückweise lineare Flussfunktion

Am Anfangspunkt x_2 bei $t \geq 0$ sind $u_\ell = -1$ für $x < x_2$ und $u_r = 1$ für $x > x_2$ die konstanten Zustände, die wegen $u_\ell < u_r$ nun durch die untere Einhüllende von $Q(u)$ miteinander verbunden werden müssen. Folglich entstehen hier zwei Stöße zwischen $u_\ell = -1$, $u_r = 0$ und $u_\ell = 0$, $u_r = 1$ mit den Geschwindigkeiten $\Sigma_2 = (Q(-1) - Q(0)) / (-1 - 0) = \frac{1}{2}$ und $\Sigma_3 = (Q(0) - Q(1)) / (0 - 1) = \frac{1}{2}$. Für $\xi_2(t) = x_2 - \frac{1}{2}t < x < \xi_3(t) = x_2 + \frac{1}{2}t$ ist demnach $u = 0$, denn dort kann die Lösung als Ähnlichkeitslösung beschrieben werden, während in der Umgebung von x_2 für $x < \xi_2(t)$ der Zustand $u = -1$ und für $\xi_3(t) < x$ der Zustand $u = 1$ herrscht. Dies geht so lange gut, so lange sich $\xi_1(t) = x_1 + \frac{1}{2}t$ und $\xi_2(t) = x_2 - \frac{1}{2}t$ nicht schneiden, was dann für $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $t_3 = x_2 - x_1$ der Fall ist. Für $t > t_3$ treffen nun die Zustände $u_\ell = 2 > u_r = 0$ aufeinander, werden also durch einen Stoß zur Sekante oberhalb $Q(u)$ von einander getrennt. Dieser hat die Geschwindigkeit $\Sigma_4 = (Q(2) - Q(0)) / (2 - 0) = 1$, und für $x < \xi_4(t) = x_3 + (t - t_3)$ und $t \geq t_3$ herrscht der Zustand $u = 2$, während für $x > \xi_4(t)$ und $t \geq t_3$ der Zustand $u = 0$ herrscht. Dies geht nur so lange gut, bis sich $\xi_3(t)$ und $\xi_4(t)$ treffen, was bei $t_4 = 3(x_2 - x_1)$ und $x_4 = \frac{1}{2}(5x_2 - 3x_1)$ der Fall ist. Für $t \geq t_4$ treffen nun die Zustände $u_\ell = 2$ und $u_r = 1 < u_\ell$ aufeinander und werden durch den Stoß mit der Geschwindigkeit $\Sigma_5 = (Q(2) - Q(1)) / (2 - 1) = \frac{3}{2}$ voneinander getrennt. Damit ist die Entropielösung für $t \geq 0$ vollständig bekannt (siehe Bild 38).

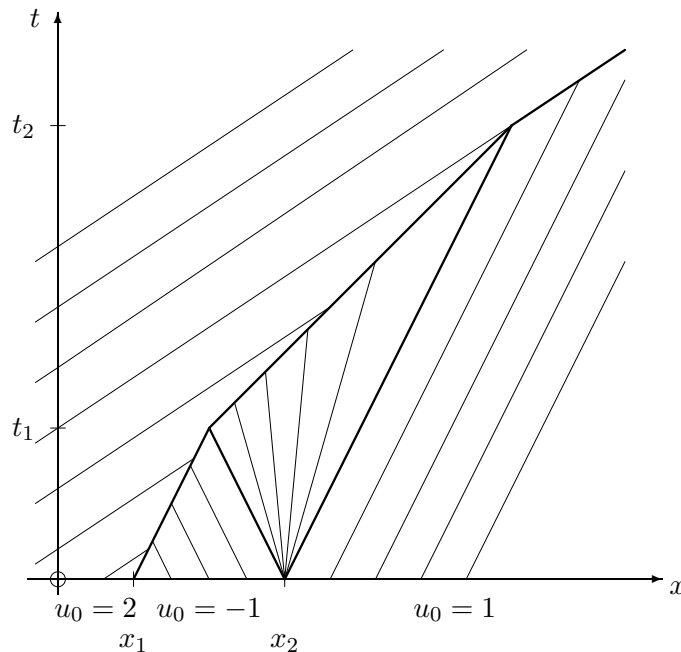


Bild 38: Frontverfolgungs-Entropie-Lösung

Wie in unserem Beispiel kann das Frontverfolgungsverfahren für das Cauchy-Problem einer skalaren Erhaltungsgleichung (1.9.2), (1.9.4) dann wie folgt durchgeführt werden:

- i) Approximiere die Flussfunktion $Q(u)$ für $|u| \leq 2\|f\|_{L^\infty}$ durch eine stetige, stückweise lineare Flussfunktion $Q^\delta(u)$;
- ii) approximiere die Anfangsdaten $f(x)$ durch stückweise konstante Daten $f^\eta(x)$.
- iii) Löse das approximierende Cauchy-Problem

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Q^\delta(\tilde{u}(x,t)) = 0 \text{ für } t > 0, x \in \mathbb{R} \text{ und } \tilde{u}(x,0) = f^\eta(x) \quad (1.13.5)$$

exakt unter Zuhilfenahme des Oleinikschen Entropiekriteriums, Satz 1.10.4.

Im folgenden werden wir zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen an $Q(u)$ und $f(x)$ die Lösungen $\tilde{u}(x,t)$ gegen $u(x,t)$ konvergieren.

Wie in unserem Beispiel ist die Lösung $\tilde{u}(x,t)$ zu jeder Wahl von δ und $\eta > 0$ jeweils stückweise konstant, und die konstanten endlich vielen Lösungswerte sind durch endlich viele "Stöße" mit endlich vielen Interaktionen voneinander getrennt. Die Lösung \tilde{u} ist die schwache Kružkovsche Entropielösung von (1.13.5). Zugehörige numerische Implementierungen berechnen die Lösung "superschnell".

1.13.1 Satz: Q_1 und Q_2 seien stückweise lineare, stetige Flussfunktionen, und u und v seien Die Kružkov-Lösungen der Riemann-Probleme zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q_1(u(x,t))) &= 0 \text{ für } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q_2(v(x,t))) &= 0 \text{ für } t > 0, x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.13.6)$$

$$u(x,0) = v(x,0) = \begin{cases} u_\ell & \text{für } x < 0, \\ u_r & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Dann gilt für $t > 0$ die Abschätzung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - v(x,t)| dx \leq \sup_{w \in [u_\ell, u_r] \cup [u_r, u_\ell]} |Q_1'(w) - Q_2'(w)| |u_\ell - u_r|. \quad (1.13.7)$$

Beweis: Wir führen hier nur den Beweis für den Fall, dass Q_1 und Q_2 beide konvex sind.

i) Sei $u_\ell > u_r$. Dann gibt es zu u und zu v jeweils einen Stoß mit der jeweiligen Stoßgeschwindigkeit

$$\Sigma_u = \frac{Q_1(u_\ell) - Q_1(u_r)}{u_\ell - u_r} \quad \text{und} \quad \Sigma_v = \frac{Q_2(u_\ell) - Q_2(u_r)}{u_\ell - u_r}.$$

Sei oBdA $\Sigma_v \geq \Sigma_u$. Dann ist $u = u_\ell$ für $x < \xi_u(t)$ und $u = u_r$ für $x > \xi_u(t)$ sowie $v = u_\ell$ für $x < \xi_v(t)$ und $v = u_r$ für $x > \xi_v(t)$. (Siehe Bild 39.)

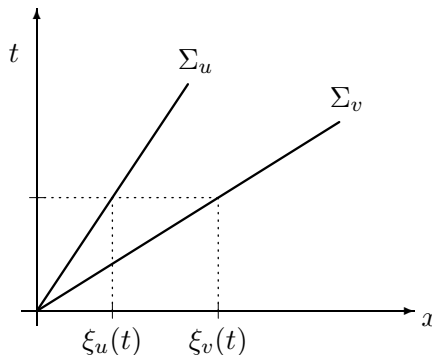


Bild 39: Stöße zu u und v

Folglich gilt für $t > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - v(x,t)| dx &= \int_{\xi_u(t)}^{\xi_v(t)} (u_\ell - u_r) dx \\ &= t(u_\ell - u_r) \left\{ \frac{Q_2(u_\ell) - Q_2(u_r)}{u_\ell - u_r} - \frac{Q_1(u_\ell) - Q_1(u_r)}{u_\ell - u_r} \right\} \\ &= t \int_{u_\ell}^{u_r} (Q_1'(w) - Q_2'(w)) dw \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - v(x,t)| dx &= \int_{u_\ell}^{u_r} (Q_1'(w) - Q_2'(w)) dw \\ &= \int_{u_r}^{u_\ell} |Q_1'(w) - Q_2'(w)| dw, \end{aligned} \quad (1.13.8)$$

woraus die Behauptung (1.13.7) folgt.

- ii) Sei nun $u_\ell \leq u_r$. Sowohl u als auch v sind dann stückweise konstante Frontverfolgungslösungen, deren Zustände sich über die Unstetigkeitslinien gemäß Satz 1.10.4 nur entlang den konvexen Flusskurven $Q_1(u)$ bzw. $Q_2(v)$ ändern können. Insbesondere gelten dann

$$\begin{aligned} u(x,t) = v(x,t) = u_\ell &\text{ für } x < tQ'_{\min} \text{ mit} \\ Q'_{\min} &:= \min\{Q_1'(w), Q_2'(w) \mid u_\ell \leq w \leq u_r\}; \\ u(x,t) = v(x,t) = u_r &\text{ für } x > tQ'_{\max} \text{ mit} \\ Q'_{\max} &:= \max\{Q_1'(w), Q_2'(w) \mid u_\ell \leq w \leq u_r\} \end{aligned}$$

Dort genügen u und v dann sogar jeder der Differentialgleichungen (1.13.6), da sie konstant sind. Wegen der hier vorausgesetzten Konvexität von Q_1 und Q_2 bedeutet das, dass $u(x,t)$ und $v(x,t)$ bei festem $t > 0$ konstant und bezüglich x monoton wachsend sind.

Sei die endliche Menge $\{w_1 < w_2 < \dots < w_N\}$ mit $w_1 = u_\ell$ und $w_N = u_r$ die Vereinigung aller Eckpunkte von Q_1 und Q_2 in der Zustandsebene. Dann haben wir außerdem wegen der vorausgesetzten Konvexität von Q_1 und Q_2 :

$$\begin{aligned} Q'_{\min} &\leq Q_1'|_{(w_1, w_2)} \leq Q_1'|_{(w_2, w_3)} \leq \dots \leq Q_1'|_{(w_{N-1}, w_N)} \leq Q'_{\max}, \\ Q'_{\min} &\leq Q_2'|_{(w_1, w_2)} \leq Q_2'|_{(w_2, w_3)} \leq \dots \leq Q_2'|_{(w_{N-1}, w_N)} \leq Q'_{\max}. \end{aligned}$$

Wegen $u_\ell \leq u_r$ sind unter Beachtung von Theorem 1.10.4 sowohl für u als auch für v Zustände nur entlang der unteren Enveloppe von Q_1 bzw. Q_2 möglich, wobei beide Flussfunktionen für $w < w_1$ durch $Q_j(w) = (w - w_1)Q'_{\min} + Q_j(w_1)$ und für $w > w_1$ durch $Q_j(w) = (w - w_N)Q'_{\max} + Q_j(w_N)$ fortgesetzt werden können.

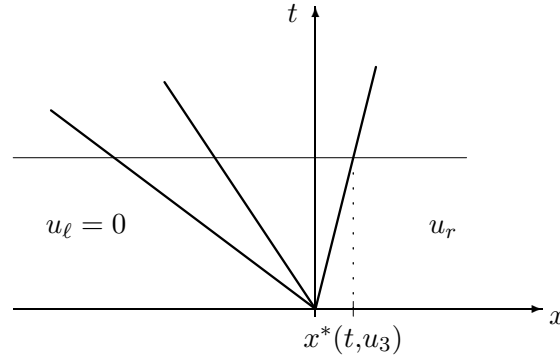


Bild 40: Unstetigkeiten entlang $x = \xi(t) + tQ'|_{(w_j, w_{j+1})}$

In jedem Winkelbereich in Bild 40 ist sowohl u als auch v konstant und nimmt über den “Stoß” entweder zu oder behält seinen Wert. Wir nehmen zur Erläuterung einmal an, es gelte:

$$u_\ell \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3, u_\ell \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3, \text{ sowie } v_1 \leq u_1, v_2 \leq u_2 \text{ und } u_3 = v_3.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{x^*(t, u_3)} (u(x, t) - v(x, t)) dx \\ &= u_1 t (Q'_1|_{(w_1, w_2)} - Q'_{\min}) + u_2 t (Q'_1|_{(w_2, w_3)} - Q'_1|_{(w_1, w_2)}) \\ & \quad - v_1 t (Q'_2|_{(w_1, w_2)} - Q'_{\min}) - v_2 t (Q'_2|_{(w_2, w_3)} - Q'_2|_{(w_1, w_2)}) \\ &= t(v_1 - u_\ell) Q'_{\min} + t(v_2 - v_1) Q'_2|_{(w_1, w_2)} + t(v_3 - v_2) Q'_2|_{(w_2, w_3)} \\ & \quad - t(u_1 - u_\ell) Q'_{\min} - t(u_2 - u_1) Q'_1|_{(w_1, w_2)} - t(u_3 - u_2) Q'_1|_{(w_2, w_3)} \\ & \quad + t u_3 (Q'_1|_{(w_2, w_3)} - Q'_2|_{(w_2, w_3)}) \\ &= -t \int_{u_\ell}^{u_3} (Q'_1(w) - Q'_2(w)) dw + t u_3 (Q'_1|_{(w_2, w_3)} - Q'_2|_{(w_2, w_3)}). \end{aligned}$$

Der Punkt $x^*(t, u_3)$ gehört zur gleichen Stoßgeschwindigkeit für u und für v ; dort gilt deshalb

$$Q'_1|_{(w_2, w_3)} = \frac{Q_1(u_3) - Q_1(u_2)}{u_3 - u_2} = \frac{Q_2(u_3) - Q_2(v_2)}{u_3 - v_2} = Q'_2|_{(w_2, w_3)}.$$

Wir erhalten also

$$\int_{-\infty}^{x^*(t, u_3)} |u(x, t) - v(x, t)| dx = t \int_{u_\ell}^{u_3} (Q'_2(w) - Q'_1(w)) dw.$$

Nun nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $u_j \leq v_j$ für $3 \leq j \leq N$ gilt. Wir erhalten dann entsprechend

$$\int_{x^*(t, u_3)}^{\infty} (v(x, t) - u(x, t)) dt = -t \int_{u_3}^{u_r} (Q'_2(w) - Q'_1(w)) dw - tu_3(Q'_2|_{(w_2, w_3)} - Q'_1|_{(w_2, w_3)}),$$

wobei der letzte Ausdruck wie vordem wegfällt, und schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |(u(x, t) - v(x, t))| dx \\ = \left\{ \int_{u_\ell}^{u_3} (Q'_2(w) - Q'_1(w)) dw + \int_{u_3}^{u_r} (Q'_1(w) - Q'_2(w)) dw \right\}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also wieder eine Gleichung wie (1.13.8), nämlich jetzt

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t) - v(x, t)| dx = \int_{u_\ell}^{u_r} |Q'_1(w) - Q'_2(w)| dw, \quad (1.13.9)$$

woraus die Abschätzung (1.13.7) sofort folgt.

Für den Fall nichtkonvexer Flussfunktionen $Q_j(w)$ sind diese für $u_\ell > u_r$ durch die konkaven Enveloppen $\widehat{Q}_j(w)$ für $j = 1$ und 2 nach Satz 1.10.4 und für $u_r \geq u_\ell$ durch die beiden konvexen Enveloppen $\underline{Q}_j(w)$ zu ersetzen. Dann ergeben sich die Gleichung (1.13.8) mit $\widehat{Q}_j'(w)$ und die Gleichung (1.13.9) mit $\underline{Q}_j'(w)$. Um aus diesen beiden Gleichungen jeweils die Abschätzung (1.13.7) zu gewinnen, ist ein Satz von Crandall und Tartar anzuwenden, den man in [64] findet. Wir verzichten hier auf die Darstellung der Details. \square

Wenn $f(x)$ stückweise konstant vorgegeben wird, gilt (1.13.7) "lokal" und impliziert für zwei Frontverfolgungslösungen die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(\bullet, t) - v(\bullet, t)\|_{L_1} &\leq |Q'_1(w) - Q'_2(w)| \sum_i |[f]_i| \\ &\leq \|Q'_1 - Q'_2\|_{L_\infty(-2\|f\|_{L_\infty}, 2\|f\|_{L_\infty})} \|f\|_{BV} \end{aligned} \quad (1.13.10)$$

für $0 < t < t_1$, wobei $t_1 > 0$ die Zeit zum ersten Kollisionspunkt der Unstetigkeitsfronten beider Frontverfolgungslösungen u und v ist und $[f]_i$ den Sprung von f an der Unstetigkeitsstelle x_i bezeichnet. Wir erhalten demnach

$$\|u(\bullet, t) - v(\bullet, t)\|_{L_1} \leq t \|Q'_1 - Q'_2\|_{L_\infty} \|f\|_{BV}. \quad (1.13.11)$$

Zur Zeit $t_1 - 0$ sind $u(x, t_1)$ und $v(x, t_1)$ stückweise konstant als Frontverfolgungslösungen. Außerdem gilt das folgende Lemma.

1.13.2 Lemma: Sei u Frontverfolgungslösung zu stückweise konstanten Anfangswerten $f(x)$. Dann gilt für jedes $t_2 > t_1 > 0$ die Ungleichung

$$\|u(\bullet, t_2)\|_{BV} \leq \|u(\bullet, t_1)\|_{BV}. \quad (1.13.12)$$

Den Beweis stellen wir als Übungsaufgabe.

Sei nun $t_1 < t < t_2$ und t_2 die nächste Kollisionspunktzeit zu u oder v . Für diese t konstruieren wir uns eine Vergleichslösung zu den stückweise konstanten ‘‘Anfangswerten’’ bei $t = t_1$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Q_1(w(x, t))) = 0 \quad \text{für } t > t_1 \quad \text{mit } w(x, t_1) = v(x, t_1).$$

Dann gilt für $t_1 < t < t_2$:

$$\|u(\bullet, t) - v(\bullet, t)\|_{L_1} \leq \|u(\bullet, t) - w(\bullet, t)\|_{L_1} + \|w(\bullet, t) - v(\bullet, t)\|_{L_1}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite verwenden wir (1.10.24), den Satz 1.10.9 von Kružkov, während $w(x, t)$ und $v(x, t)$ gleiche ‘‘Anfangswerte’’ bei $t = t_1$ haben, und (1.13.11) zwischen t_1 und t_2 verwendet werden kann:

$$\|u(\bullet, t) - v(\bullet, t)\|_{L_1} \leq \|u(\bullet, t_1) - v(\bullet, t_1)\|_{L_1} + (t - t_1)\|Q'_1 - Q'_2\|_{L_\infty} \|v(\bullet, t_1)\|_{BV}.$$

Mit (1.13.11) für den ersten Term und Lemma 1.13.2 für den zweiten erhalten wir

$$\|u(\bullet, t) - v(\bullet, t)\|_{L_1} \leq t_1\|Q'_1 - Q'_2\|_{L_\infty} \|f\|_{BV} + (t - t_1)\|Q'_1 - Q'_2\|_{L_\infty} \|f\|_{BV},$$

d. h. schließlich

$$\|u(\bullet, t) - v(\bullet, t)\|_{L_1} \leq t\|Q'_1 - Q'_2\|_{L_\infty} \|f\|_{BV} \quad \text{für alle } t > 0. \quad (1.13.13)$$

□

Nun kann man beliebige Anfangsdaten $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ durch Treppenfunktionen f_δ approximieren, so dass

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \{\|f_\delta - f\|_{L_1(\mathbb{R})} + \|f_\delta - f\|_{BV(\mathbb{R})}\} = 0 \quad (1.13.14)$$

gilt. Ausserdem kann jede stetige, fast überall differenzierbare Flussfunktion $Q(u)$ mit $Q'(\bullet) \in \bar{\mathcal{E}}$ ($\bar{\mathcal{E}}$ Raum der Regelfunktion versehen mit der Supremum-Norm) durch stetige stückweise lineare Flussfunktionen $Q_j(u)$ auf jedem kompakten Intervall $u \in I \Subset \mathbb{R}$ so approximiert werden, dass gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{u \in I} |Q'_j(u) - Q'(u)| = 0. \quad (1.13.15)$$

Zu jedem approximierenden Paar von Flussfunktionen Q_j erhält man dann eine Frontverfolgungslösung, die Kružkovsches schwache Entropielösung ist. Aus (1.13.13) folgt dann die Existenz einer Grenzfunktion $u(x, t)$, die für fast alle x erklärt ist. Des weiteren gilt für beliebiges $k \in \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} |u_{j, \delta}(x, t) - k| = |u(x, t) - k| \quad (1.13.16)$$

für fast jedes x punktweise gilt mit $u(\bullet, t) \in L_1$; entsprechend gilt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \int_{|x| \leq R} |\text{sign}(u_{j,\delta}(x,t) - k)(Q_j(u_{j,\delta}(x,t)) - Q_j(k)) - \text{sign}(u(x,t) - k)(Q(u(x,t)) - Q(k))| dx = 0 \quad (1.13.17)$$

für jedes $R > 0$. Deshalb erfüllt $u(x,t)$ die Bedingungen (1.10.22) und ist eine schwache Kružkovsche Entropielösung. Somit haben wir den folgenden Existenz- und Vergleichssatz.

1.13.3 Satz: Sei $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ und $Q(u)$ fast überall differenzierbar mit $Q' \in \bar{\mathcal{E}}[-R,R]$ mit $R := 2\|f\|_{L_\infty}$. Dann existiert genau eine schwache Kružkovsche Entropielösung $u(x,t)$ des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Q(u(x,t))) = 0 \quad \text{für } t > 0 \quad \text{und } u(x,0) = f(x). \quad (1.13.18)$$

Ist $v(x,t)$ schwache Kružkovsche Entropielösung eines entsprechenden Anfangswertproblems mit der Flussfunktion $\tilde{Q}(v)$ und Anfangsdaten g , so gilt die Abschätzung

$$\|u(\bullet,t) - v(\bullet,t)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \|f - g\|_{L_1(\mathbb{R})} + t \cdot \min\{\|f\|_{BV}, \|g\|_{BV}\} \sup_{w \in I} |Q'(w) - \tilde{Q}'(w)| \quad (1.13.19)$$

mit $I = [-R,R]$ und $R = \max\{2\|f\|_{L_\infty}, 2\|g\|_{L_\infty}\}$.

Beweis: Der Existenzsatz wurde bereits oben bewiesen. Zum Beweis des Vergleichssatzes nehmen wir oBdA. $\|g\|_{BV} \leq \|f\|_{BV}$ an und definieren noch die schwache Kružkovsche Entropielösung $w(x,t)$ zu

$$w_t + (Q(w))_x = 0 \quad \text{und } w(x,0) = g(x).$$

Dann gilt mit dem Satz 1.10.9 von Kružkov und (1.13.13) schließlich die behauptete Ungleichung

$$\begin{aligned} \|u(\bullet,t) - v(\bullet,t)\|_{L_1} &\leq \|u(\bullet,t) - w(\bullet,t)\|_{L_1} + \|w(\bullet,t) - v(\bullet,t)\|_{L_1} \\ &\leq \|f - g\|_{L_1} + t \sup |Q'(w) - \tilde{Q}'(w)| \|g\|_{BV}. \end{aligned}$$

□

Zusammenfassend haben wir den folgenden zentralen Satz für skalare räumliche eindimensionale Erhaltungsgleichungen.

1.13.4 Satz: Sei $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ und $Q(u)$ fast überall differenzierbar mit $Q' \in \bar{\mathcal{E}}[-R,R]$, $R = 2\|f\|_{L_\infty}$. Dann hat die eindeutige schwache Kružkovsche Entropielösung des Anfangswertproblems (1.13.18) für $t \in [0,\infty)$ die folgenden Eigenschaften:

i) *Maximum-Prinzip:*

$$\|u(\bullet,t)\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_\infty}. \quad (1.13.20)$$

ii) *Totalvariationsabnehmend:*

$$\|u(\bullet,t)\|_{BV} \leq \|f\|_{BV}. \quad (1.13.21)$$

iii) L_1 -kontraktiv: Sind f und g zwei Anfangsdaten, so gelten für die zugehörigen schwachen Kružkovschen Entropielösungen u und v :

$$\|u(\bullet, t) - v(\bullet, t)\|_{L_1} \leq \|f - g\|_{L_1}. \quad (1.13.22)$$

iv) Monotonieerhaltung:

$$\text{Ist } f \text{ monoton, so ist auch } u(\bullet, t) \text{ monoton bei festem } t > 0. \quad (1.13.23)$$

v) Monotonie des Lösungsoperators:

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) \text{ hat } u(x, t) \leq v(x, t) \text{ für fast jedes } t > 0 \\ \text{und fast jedes } x \in \mathbb{R} \text{ zur Folge.} \end{aligned} \quad (1.13.24)$$

vi) Die Lösung ist in L_1 bezüglich t Lipschitz-stetig:

$$\|u(\bullet, t) - u(\bullet, s)\|_{L_1} \leq \sup_{w \in I} |Q'(w)| \|f\|_{BV} |t - s| \quad (1.13.25)$$

für beliebige $t, s \in [0, \infty)$.

Aufgabe 27: Man beweise Lemma 1.13.2.

2 Vollständig integrable überbestimmte Systeme erster Ordnung

Wir hatten im Kapitel 1 gesehen, daß für die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung noch eine beliebige Anfangsfunktion vorgegeben werden konnte. Damit stellt sich die Frage, ob ein System erster Ordnung mit einer gesuchten Funktion auch Lösungen hat. (Siehe hierzu auch [58] §18.3, [115] .)

2.1 Zwei Gleichungen erster Ordnung

Statt einer Gleichung erster Ordnung betrachten wir nun

$$F(x,y,u,p,q) = 0 \text{ und } G(x,y,u,p,q) = 0, \quad (2.1.1)$$

d.h. ein System erster Ordnung von **zwei** Gleichungen für **eine** gesuchte Funktion

$$u(x,y) \text{ mit } p = u_x \text{ und } q = u_y.$$

Setzen wir voraus, daß die Determinantenbedingung

$$\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.1.2)$$

erfüllt ist, dann können wir mit dem Satz über implizite Funktionen das System (2.1.1) nach p und q auflösen und erhalten lokal das System

$$\begin{aligned} u_x &= f(x,y,u), \\ u_y &= g(x,y,u). \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Dieses System ist äquivalent zur **Pfaffschen Differentialgleichung**

$$\omega := du - f dx - g dy = 0. \quad (2.1.4)$$

Die Pfaffsche Differentialgleichung (2.1.4) bedeutet:

Man finde eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_2 in der Gestalt $u = u(x,y)$ derart, daß für die Differentialform ω die Gleichung

$$\omega|_{\mathcal{M}_2} = du|_{\mathcal{M}_2} - f|_{\mathcal{M}_2} dx - g|_{\mathcal{M}_2} dy = 0 dx + 0 dy = 0$$

auf \mathcal{M}_2 gilt.

Wenn es eine Lösung $u = u(x,y)$ gibt, dann muß auf ihr die Integrabilitätsbedingung

$$u_{xy} = p_y = u_{xy} = q_x$$

gelten. Das bedeutet mit (2.1.3) die Relation

$$f_y + f_u g = g_x + g_u f. \quad (2.1.5)$$

Definition: Das System (2.1.3) heißt **vollständig integrabel** in $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$, wenn dort die Gleichung (2.1.5) erfüllt ist.

Mit der Definition der äußeren Ableitung rechnet man sofort aus, daß sich (2.1.5) auch in Pfaffschen Formen ausdrücken läßt.

2.1.1 Beobachtung: (2.1.3) bzw. (2.1.4) ist vollständig integrabel genau dann, wenn gilt

$$[\omega \wedge [d \wedge \omega]] = 0 \quad (2.1.6)$$

oder wenn eine Pfaffsche Form $\vartheta = Pdx + Qdy + Rdu$ existiert, so daß gilt:

$$[d \wedge \omega] = [\vartheta \wedge \omega]. \quad (2.1.7)$$

2.1.2 Beispiel: Für das System

$$u_x = \frac{y^2 + u^2}{xu} =: f, \quad u_y = -\frac{y}{u} =: g$$

bzw.

$$\omega = du - \frac{y^2 + u^2}{xu} dx + \frac{y}{u} dy = 0$$

prüfe man die vollständige Integrabilität nach.

Hier sind

$$f_y = \frac{2y}{xu}, \quad f_u = \frac{2}{x} - \frac{u^2 + y^2}{xu^2}, \quad g_x = 0, \quad g_u = \frac{y}{u^2},$$

$$g_x + f g_u = \frac{y^2 + u^2}{xu} \cdot \frac{y}{u^2} = f_y + g f_u.$$

Folglich ist das System vollständig integrabel. Zum gleichen Ergebnis kommen wir natürlich bei Verwendung der Pfaffschen Formen:

$$\begin{aligned} [d \wedge \omega] &= [d \wedge du] - [d \wedge \frac{y^2 + u^2}{xu} dx] + [d \wedge \frac{y}{u} dy] \\ &= \frac{2y}{xu} [dx \wedge dy] + \left(\frac{2}{x} - \frac{u^2 + y^2}{xu^2} \right) [dx \wedge du] + \frac{y}{u^2} [dy \wedge du], \\ \left[\left(du - \frac{y^2 + u^2}{xu} dx + \frac{y}{u} dy \right) \wedge [d \wedge \omega] \right] \\ &= \left\{ \frac{2y}{xu} - \frac{2y}{xu} + \frac{y(u^2 + y^2)}{xu^3} - \frac{(y^2 + u^2)}{xu} \cdot \frac{y}{u^2} \right\} [dx \wedge dy \wedge du] = 0, \end{aligned}$$

das entspricht Bedingung (2.1.6). □

Für die Lösung überbestimmter Systeme gilt der folgende Existenz- und Eindeutigkeitsatz.

2.1.3 Satz: Das System (2.1.3) hat durch jeden Punkt $(x_0, y_0, u_0) \in \mathcal{G}$ genau dann eine Lösung $u = u(x, y)$, wenn (2.1.3) vollständig integrabel ist. Ist das System vollständig integrabel, so ist die Lösung durch (x_0, y_0, u_0) eindeutig.

Beweis: Zum Beweis dieses Satzes nehmen wir zunächst an, daß

i) $u = u(x, y)$ Lösung von (2.1.3) sei. Dann gilt

$$u_{xy} = [f(x, y, u(x, y))]_y = u_{yx} = [g(x, y, u(x, y))]_x,$$

also mit der Kettenregel und (2.1.3)

$$f_y + f_u \cdot g = g_x + g_u \cdot f.$$

Dies gilt insbesondere in (x_0, y_0, u_0) . Da (x_0, y_0, u_0) in \mathcal{G} beliebig gewählt werden kann, folgt die Behauptung.

ii) Sei (2.1.3) vollständig integrabel. Dann betrachten wir die Gleichung (2.1.4) auf der Geraden

$$x = x_0 + c_1 t \quad , \quad y = y_0 + c_2 t.$$

Dort erhalten wir die

gewöhnliche Differentialgleichung für $U(t) := u(x_0 + c_1 t, y_0 + c_2 t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= c_1 f(x_0 + c_1 t, y_0 + c_2 t, U) + c_2 g(x_0 + c_1 t, y_0 + c_2 t, U) \\ \text{mit } U(0) &= u(x_0, y_0) = u_0. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Dieses Anfangswertproblem hat für $f, g \in C^1$ genau eine Lösung

$$u = U(c_1, c_2, t; x_0, y_0, u_0). \quad (2.1.9)$$

Die Lösung des überbestimmten Systems (2.1.3) ergibt sich dann als

$$u(x, y) := U(x - x_0, y - y_0, 1; x_0, y_0, u_0). \quad (2.1.10)$$

Den Nachweis dafür, daß (2.1.10) die gesuchte Lösung des überbestimmten Systems (2.1.3) ist, stellen wir dem Leser als Aufgabe. \square

2.1.4 Beispiel: Lösung des Systems aus Beispiel 2.1.2 nach (2.1.8)–(2.1.10):

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= c_1 f + c_2 g = c_1 \frac{(y_0 + c_2 t)^2 + U^2}{(x_0 + c_1 t)U} - c_2 \frac{(y_0 + c_2 t)}{U}, \\ \frac{d(U^2)}{dt} &= \frac{2c_1 U^2}{x_0 + c_1 t} + \frac{2c_1 (y_0 + c_2 t)^2}{x_0 + c_1 t} - 2c_2 (y_0 + c_2 t). \end{aligned}$$

Dies ist für $V = U^2$ eine einfache lineare Differentialgleichung, die wir mit Hilfe der zugeordneten homogenen Differentialgleichung

$$\frac{1}{V_0} \dot{V}_0 = \frac{2c_1}{x_0 + c_1 t} \quad \text{mit der Lösung } V_0 = \alpha(x_0 + c_1 t)^2$$

und Variation der Konstanten $\alpha = \alpha(t)$ lösen. Mit

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\alpha}(x_0 + c_1t)^2 + \alpha 2c_1(x_0 + c_1t) \\ &= \frac{2c_1\alpha(x_0 + c_1t)^2}{(x_0 + c_1t)} + \frac{2c_1(y_0 + c_2t)^2}{(x_0 + c_1t)} - 2c_2(y_0 + c_2t)\end{aligned}$$

erhält man

$$\dot{\alpha} = 2c_1 \frac{(y_0 + c_2t)^2}{(x_0 + c_1t)^3} - 2c_2 \frac{(y_0 + c_2t)}{(x_0 + c_1t)^2} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{y_0 + c_2t}{x_0 + c_1t} \right)^2.$$

Demnach gilt

$$V = U^2 = \alpha_0(x_0 + c_1t)^2 - (y_0 + c_2t)^2,$$

und aus der Anfangsbedingung folgt

$$\alpha_0 x_0^2 - y_0^2 = u_0^2, \quad \alpha_0 = \frac{1}{x_0^2}(u_0^2 + y_0^2).$$

Damit erhalten wir

$$U(c_1, c_2; t; x_0, y_0, u_0) = (\text{sign } u_0)(x_0 + c_1t) \times \sqrt{\frac{1}{x_0^2}(u_0^2 + y_0^2) - \left(\frac{y_0 + c_2t}{x_0 + c_1t}\right)^2}.$$

Für (2.1.10) setzen wir $c_1 = x - x_0$, $c_2 = y - y_0$ ein und erhalten schließlich

$$u(x, y) = (\text{sign } u_0) \sqrt{\frac{1}{x_0^2}(u_0^2 + y_0^2)x^2 - y^2}.$$

Ein zweiter Weg zur Bestimmung der Lösung von (2.1.3) besteht im Lösen der als parameterabhängige gewöhnliche Differentialgleichung gedeuteten Gleichung $u_y = g(x, y, u)$:

$$\frac{dU}{dy} = g(x, y, U)$$

bei festem x . Ihre allgemeine Lösung enthält eine im allgemeinen von x abhängige Integrationskonstante $\varphi(x)$:

$$u = U(x, y, \varphi(x)).$$

Setzt man diese Lösung in die erste Gleichung von (2.1.3) ein, so erhält man nun für φ eine gewöhnliche parameterabhängige Differentialgleichung bei festgehaltenem Parameter y :

$$U_x + U_\varphi \varphi' = f(x, y, U(x, y, \varphi(x))). \quad (2.1.11)$$

Nachdem daraus $\varphi(x)$ berechnet wurde, ergibt sich die gesuchte Lösung aus

$$u(x, y) = U(x, y, \varphi(x)).$$

Für die spezielle Lösung durch den Punkt $(x_0, y_0, u_0) \in \mathcal{G}$ beachte man die Anfangsbedingung

$$u_0 = U(x_0, y_0, \varphi(x_0)),$$

die eine Bedingung für $\varphi(x_0)$ liefert und $\varphi(x)$ hier eindeutig festlegt.

2.1.5 Beispiel: Lösung von Beispiel 2.1.2 nach der Methode (2.1.11): Aus $u_y = -\frac{y}{u}$ folgt $\frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{2}y^2 + \varphi(x)$. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$2u \cdot u_x = 2\varphi' = \frac{y^2 + u^2}{x \cdot u} \cdot 2u = \frac{2}{x}(y^2 + u^2) = \frac{4\varphi}{x}$$

für φ , woraus

$$\varphi(x) = cx^2$$

folgt. Einsetzen liefert

$$u^2 = -y^2 + 2cx^2,$$

also im Anfangspunkt

$$u_0^2 = -y_0^2 + 2cx_0^2.$$

Daraus folgt

$$u^2 = -y^2 + \frac{u_0^2 + y_0^2}{x_0^2} x^2$$

oder

$$u = \pm \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 (u_0^2 + y_0^2) - y^2}.$$

Für $u_0 = 0$ lautet die Lösung

$$u = \pm \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 y_0^2 - y^2} \quad \text{für } y^2 \leq \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 y_0^2,$$

und falls $u_0 \neq 0$:

$$u = (\text{sign } u_0) \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 (u_0^2 + y_0^2) - y^2}.$$

Oben hatten wir das System (2.1.1) erst aufgelöst und die spezielle Gestalt (2.1.3) benutzt. Man möchte im allgemeinen aber (2.1.1) selbst ansehen können, ob es vollständig integrierbar ist.

2.1.6 Satz: *Unter Voraussetzung (2.1.2) ist das System (2.1.1) vollständig integrabel genau dann, wenn auf*

$$F(x,y,u,p,q) = 0 \quad , \quad G(x,y,u,p,q) = 0$$

gilt:

$$\begin{aligned} (F_p G_x - G_p F_x) &+ (F_q G_y - G_q F_y) \\ &+ G_u (p F_p + q F_q) - F_u (p G_p + q G_q) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Beweis: Die Gleichungen $F = G = 0$ definieren im \mathbb{R}^5 eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die wegen (2.1.2) auch lokal geschrieben werden kann als

$$p = f(x,y,u) \quad , \quad q = g(x,y,u)$$

mit

$$F(x,y,u, f(x,y,u), g(x,y,u)) = 0 \quad , \quad G(x,y,u, f(x,y,u), g(x,y,u)) = 0$$

für $(x,y,u) \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$. Dort muß dann auch gelten

$$\begin{aligned} F_x + F_p f_x + F_q g_x &= 0, G_x + G_p f_x + G_q g_x = 0, \\ F_y + F_p f_y + F_q g_y &= 0, G_y + G_p f_y + G_q g_y = 0, \\ F_u + F_p f_u + F_q g_u &= 0, G_u + G_p f_u + G_q g_u = 0. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Im Folgenden setzen wir voraus:

$$\Delta = (F_p G_q - F_q G_p) = \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dann erhalten wir durch Linearkombinationen der Gleichungen (2.1.13) auch die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_y \Delta + \begin{vmatrix} F_y & F_q \\ G_y & G_q \end{vmatrix} &= 0, \quad g_x \Delta + \begin{vmatrix} F_p & F_x \\ G_p & G_x \end{vmatrix} = 0, \\ f_u \Delta + \begin{vmatrix} F_u & F_q \\ G_u & G_q \end{vmatrix} &= 0, \quad g_u \Delta + \begin{vmatrix} F_p & F_u \\ G_p & G_u \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Das System (2.1.1) ist nach Definition genau dann vollständig integrabel, falls

$$f_y + g f_u = g_x + f g_u$$

gilt. Setzen wir hier (2.1.14) ein, so ist dies wegen $\Delta \neq 0$ äquivalent zu

$$\begin{vmatrix} F_y & F_q \\ G_y & G_q \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} F_u & F_q \\ G_u & G_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_p & F_x \\ G_p & G_x \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} F_p & F_u \\ G_p & G_u \end{vmatrix},$$

das ist die Bedingung (2.1.12). □

Die Ausdrücke

$$\begin{vmatrix} F_p & F_x \\ G_p & G_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q & F_y \\ G_q & G_y \end{vmatrix} =: (F; G)$$

heißen auch **Poisson–Klammern**. Mit diesen lautet also Bedingung (2.1.12) für die vollständige Integrabilität:

$$(F; G) = \begin{vmatrix} F_u, & pF_p + qF_q \\ G_u, & pG_p + qG_q \end{vmatrix}. \quad (2.1.15)$$

Aufgabe 28: Man zeige, daß mit dem Verfahren (2.1.8) durch (2.1.10) die Lösung durch (x_0, y_0, u_0) bestimmt wird und diese eindeutig ist.

Aufgabe 29: Man prüfe, ob das System

$$u_x = \frac{3x^2 e^{-u}}{(x^3 + y^3)^2}, u_y = \frac{3y^2 e^{-u}}{(x^3 + y^3)^2} \{(x^3 + y^3)^2 + 1\}$$

vollständig integrabel ist und bestimme gegebenenfalls die Lösungen.

2.2 Die Methode von Lagrange und Charpit

Auf Satz 2.3 beruht die Methode von Lagrange und Charpit zum Finden vollständiger Integrale einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (Abschnitt 1.7.2). Gegeben sei die Differentialgleichung

$$F(x, y, u, p, q) = 0. \quad (2.2.1)$$

Man bestimme zu gegebenem F zunächst eine Lösung G der linearen partiellen Differentialgleichung (2.1.12) im \mathbb{R}^5 in der Gestalt

$$G(x, y, u, p, q) = a \quad (2.2.2)$$

unter Beachtung von

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nun löse man (2.2.1), (2.2.2) nach p und q auf,

$$p = f(x, y, u, a), \quad q = g(x, y, u, a). \quad (2.2.3)$$

Sodann integriere man $p = f$ nach x bei festem y :

$$u = \varphi(x, y, a, k), \quad (2.2.4)$$

wobei k die Integrationskonstante bezeichnet.

Man setze $k = w(y)$ ein und beachte $q = g$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \varphi(x, y, a, w(y)), \\ \varphi_w \cdot w'(y) + \varphi_y &= g(x, y, \varphi(x, y, a, w(y)), a). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für w mit Lösungen $w(y, b)$, wobei b die Integrationskonstante bezeichnet. Dann ist

$$u = \varphi(x, y, a, w(y, b)) \quad (2.2.6)$$

eine Lösung von $F = 0$, welche zwei willkürliche Konstante a, b enthält, und φ ist im allgemeinen ein vollständiges Integral.

Aufgabe 30: Bestimme zu

$$F \equiv pq - xy = 0$$

ein vollständiges Integral mittels der Methode von Lagrange und Charpit.

2.3 Vollständig integrable Systeme im \mathbb{R}^n

Mit Hilfe der **Pfaffschen Formen** [58] lassen sich vollständig integrable Systeme erster Ordnung für r gesuchte Funktionen im \mathbb{R}^n behandeln. Ein System von r Differentialgleichungen erster Ordnung im \mathbb{R}^n in lokal expliziter Gestalt lautet

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^k} = B_k^j(x^1, \dots, x^n; u^1, \dots, u^r) \quad \text{für } j = 1, \dots, r, k = 1, \dots, n, \quad (2.3.1)$$

und ist äquivalent zum **Pfaffschen System**

$$\omega_j := du^j - \sum_{k=1}^n B_k^j dx^k = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, r. \quad (2.3.2)$$

Definition: Ein System Pfaffscher Gleichungen

$$\omega_j = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, r \quad (2.3.3)$$

heißt **vollständig integrabel**, wenn die Gleichungen

$$[[d \wedge \omega_j] \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_r] = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, r \quad (2.3.4)$$

erfüllt sind.

Die Integrabilitätsbedingungen (2.3.4) entsprechen $\binom{n+r}{r+2}$ Bedingungen an die Koeffizienten von ω_j , d.h. für (2.3.2) an die $r \cdot n$ Funktionen B_k^j . Analog zum Fall $n = 2$ gilt auch hier:

2.3.1 Satz: *Ein System (2.3.1) bzw. (2.3.3) besitzt durch jeden Punkt $(x_0^1, \dots, x_0^n; u_0^1, \dots, u_0^r) \in \mathcal{G}$ jeweils genau eine Lösung $u^j = u^j(x^1, \dots, x^n)$, $j = 1, \dots, r$ dann und nur dann, wenn das System vollständig integrabel ist.*

Die Konstruktion der Lösung ist auch hier mit den beiden o.g. Methoden möglich. Die erste Variante lautet jetzt:

1. Schritt: Schreibe das System (2.3.3) durch geeignetes Auflösen in der Gestalt

$$du^j = \sum_{k=1}^n B_k^j(\vec{x}, \vec{u}) dx^k \quad \text{für } j = 1, \dots, r. \quad (2.3.5)$$

2. Schritt: Löse das Anfangswertproblem für das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dU^j}{dt} &= \sum_{k=1}^n B_k^j(x_0^1 + c_1 t, x_0^2 + c_2 t, \dots, x_0^n + c_n t, U^1, \dots, U^r) \cdot c_k, \\ U^j(0) &= u_0^j \quad \text{für } j = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Die Lösung hat die Gestalt $u^j = U^j(c_1, \dots, c_n; t; \vec{x}_0, \vec{u}_0)$ für $j = 1, \dots, r$.

3. Schritt: Wenn das System vollständig integrabel ist, erhält man die Lösung des überbestimmten Systems aus

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{U}(\vec{x} - \vec{x}_0; 1, \vec{x}_0, \vec{u}_0). \quad (2.3.7)$$

2.3.2 Bemerkung: Man erspart sich den Kalkül der Poisson-Klammern und kann leicht auf mehr Gesuchte und Unabhängige verallgemeinern, wenn man Pfaffsche Gleichungen schreibt. Insbesondere ist Satz 2.1.6 äquivalent zur Aussage: *Das Pfaffsche System für $(x, y, u, p, q) \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^5$,*

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= dF = F_x dx + F_y dy + F_u du + F_p dp + F_q dq = 0, \\ \omega_2 &:= dG = G_x dx + G_y dy + G_u du + G_p dp + G_q dq = 0, \\ \omega_3 &:= p dx + q dy - du = 0 \end{aligned}$$

ist vollständig integrabel im \mathbb{R}^5 genau dann, wenn (2.1.1) vollständig integrabel ist.

Aufgabe 31: Bestimme die Lösungen des Systems

$$u_x = \frac{y-x}{yu}, \quad v_x = \frac{x}{vy}, \quad u_y = \frac{1}{u} + \frac{v^2}{2yu}, \quad v_y = -\frac{v}{2y}.$$

3 Systeme erster Ordnung im \mathbb{R}^2 mit n Gleichungen für n gesuchte Funktionen und die Typeneinteilung

(siehe auch [61] S. 69 ff., [58]) Wir betrachten jetzt Systeme der Gestalt

$$\sum_{j=1}^n a_j^\ell u_x^j + b_j^\ell u_y^j + f^\ell = 0, \quad \ell = 1, \dots, n \quad (3.0.1)$$

mit reellwertigen Koeffizientenfunktionen $a_j^\ell, b_j^\ell, f^\ell$, oder abgekürzt

$$A\vec{u}_x + B\vec{u}_y + \vec{f} = \vec{0}.$$

3.1 Klassifizierung und Typen

Das System (3.0.1) heißt

$$\begin{array}{ll} \text{linear,} & \text{wenn} \quad \vec{f} = C\vec{u} + \vec{g}; \quad \vec{g}, A, B, C = C(x, y), \\ \text{fastlinear,} & \text{wenn} \quad \vec{f} = \vec{f}(x, y, \vec{u}); \quad A, B = B(x, y), \\ \text{quasilinear,} & \text{wenn} \quad \vec{f}, A, B = B(x, y, \vec{u}). \end{array}$$

In den vorhergehenden Abschnitten konnten wir die partiellen Differentialgleichungen jeweils auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduzieren, indem wir geeignete Richtungsableitungen einführt. In (3.0.1) sind zunächst n^2 Richtungsableitungen miteinander verknüpft. Man versucht wieder eine Reduktion auf weniger Richtungen. Dazu betrachten wir Linearkombinationen von (3.0.1):

$$\sum_{k=1}^n \left(p_k \sum_{j=1}^n a_j^k u_x^j + p_k \sum_{j=1}^n b_j^k u_y^j + p_k f^k \right) = 0.$$

Unser Wunsch ist die Gestalt

$$\vec{p}^\top A \vec{u}_x + \vec{p}^\top B \vec{u}_y + \vec{p}^\top \vec{f} \stackrel{!}{=} \vec{g}^\top (\alpha \vec{u}_x + \beta \vec{u}_y) + \vec{p}^\top \vec{f} = \vec{0}.$$

mit einer einheitlichen Richtungsableitung $(\alpha \vec{u}_x + \beta \vec{u}_y)$. Wir fordern also

$$\vec{p}^\top A = \alpha \vec{g}^\top \quad \text{und} \quad \vec{p}^\top B = \beta \vec{g}^\top \quad \text{bzw.}$$

$$\vec{p}^\top (\beta A - \alpha B) = 0. \quad (3.1.1)$$

Für $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ ist dies ein *Eigenwertproblem*:

$$\begin{aligned} \text{Det } (\lambda A - B) &= 0 \quad \text{für } \alpha \neq 0 \quad \text{mit } \lambda = \frac{\beta}{\alpha}, \\ \lambda \vec{p}^\top A &= \vec{p}^\top B \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \text{Det } (A - \mu B) &= 0 \quad \text{für } \beta \neq 0 \quad \text{mit } \mu = \frac{\alpha}{\beta}, \\ \vec{p}^\top A &= \mu \vec{p}^\top B. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Der Eigenwert $\lambda = \lambda(x, y, \vec{u})$ und die Eigenvektoren $\vec{p} = \vec{p}(x, y, \vec{u})$ hängen im allgemeinen nicht nur von (x, y) sondern auch von der Lösung \vec{u} ab. Bei linearen und fastlinearen Systemen ist hingegen $\lambda = \lambda(x, y)$, $\vec{p} = \vec{p}(x, y)$. Den Fall $\alpha = \beta = 0$ wollen wir im Folgenden ausschließen, denn $\text{Det } A = \text{Det } B = 0$ kann als Entartungsfall angesehen werden.

Nach **Petrovski** nehmen wir die folgende **Typeneinteilung** vor:

Definition: Das System (3.0.1) heißt (im quasilinearen Fall in Bezug auf die Lösung \vec{u})

elliptisch, wenn *alle* Eigenwerte $\lambda_\ell(x, y)$ *nicht reell* sind;

hyperbolisch, wenn *alle* Eigenwerte *reell* sind und es n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{p}_\ell(x, y, \vec{u})$, $\ell = 1, \dots, n$ gibt mit zugehörigen λ_ℓ oder μ_ℓ bzw. $\alpha_\ell(x, y, \vec{u})$ und $\beta_\ell(x, y, \vec{u})$;

parabolisch, wenn es mindestens einen m -fachen *reellen* Eigenwert mit $m \geq 2$ und mit höchstens $m - 1$ linear unabhängigen Eigenvektoren gibt;

vom zusammengesetzten Typ, wenn die *Eigenvektoren zu reellen* Eigenwerten *Maximalrang* haben; d.h. wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die *nicht reellen* Eigenwerte bezeichnet, dann muß der Rang der zu $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_p$ gehörenden Eigenvektoren $(n - r)$ sein.

Bemerkungen:

i) Da A, B reell vorausgesetzt werden, ist mit nichtreellem Eigenwert λ_ℓ auch $\bar{\lambda}_\ell$ und mit \vec{p}_ℓ auch $\bar{\vec{p}}_\ell$ Eigenvektor. Für ein im Sinne von Petrovski *elliptisches* System ist demnach n gerade.

ii) Sind die Eigenwerte $\alpha_\ell : \beta_\ell$ alle *reell* und gibt es n *verschiedene*, so sind alle Eigenwerte einfach und $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ sind linear unabhängig, d.h. das System ist *hyperbolisch*. Solche Systeme nennt man auch **strikt hyperbolisch**.

3.1.1 Satz: Seien $A, B \in C^k(\mathcal{G})$, $k \geq 0$ und (3.1.2) bzw. (3.1.3) habe n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt für $\lambda_\ell(x, y, \vec{u})$ und $\vec{p}_\ell(x, y, \vec{u})$ auch $\lambda_\ell \in C^k(\mathcal{G})$, $\vec{p}_\ell \in C^k(\mathcal{G})$.

Beweis: i) Jeder Eigenwert λ_ℓ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms,

$$\text{Det } (\lambda_\ell A - B) = \wp_n(x, y, \vec{u}, \lambda_\ell) = \sum_{k=0}^n a_k(x, y; \vec{u}) \lambda_\ell^k = 0. \quad (3.1.4)$$

Nach Voraussetzung hat (3.1.4) n verschiedene Nullstellen, diese sind also *einfach* und folglich gilt

$$\left. \frac{\partial \wp_n}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_\ell} \neq 0. \quad (3.1.5)$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen kann dann (3.1.4) nach λ_ℓ aufgelöst werden und wegen $\frac{\partial \wp_n}{\partial \lambda} \in C^k(\mathcal{G})$ folgt auch $\lambda_\ell \in C^k(\mathcal{G})$.

ii) Für die Eigenvektoren betrachten wir das System von Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{p}_\ell^\top (\lambda_\ell A - B) &= \vec{0}, \\ \vec{p}_\ell^\top \vec{p}_\ell &= 1.\end{aligned}\tag{3.1.6}$$

Die Funktionalmatrix von (3.1.6) in Bezug auf \vec{p} ist

$$\begin{pmatrix} \lambda_\ell A - B \\ 2\vec{p}_\ell \end{pmatrix}.\tag{3.1.7}$$

Nun ist der Rang $(\lambda_\ell A - B) = n - 1$ nach Voraussetzung, denn λ_ℓ ist *einfacher* Eigenwert, und es gilt

$$\vec{p}_\ell^\top \vec{a}_j = \vec{p}_\ell^\top (\lambda_\ell A - B)_j = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

wobei $\vec{a}_j = (\lambda_\ell A - B)_j$ die j -te Spalte bedeutet. Folglich sind \vec{p}_ℓ und \vec{a}_j voneinander linear *unabhängig*, d.h. der Rang von (3.1.7) ist $(n - 1) + 1 = n$. Die Lösung von (3.1.6) ist nach dem Satz über implizite Funktionen also *lokal eindeutig* und *so glatt* wie A und B sowie λ_ℓ , d.h. in C^k . \square

Bemerkung: Selbst für $A, B \in C^\infty(\mathcal{G})$ hängen beim Auftreten *mehrfacher* Eigenwerte die Eigen- und Hauptvektoren im allgemeinen *nicht* mehr stetig von (x, y, \vec{u}) ab; siehe dazu das Beispiel von Rellich in [79] S. 111.

Für das in diesem Abschnitt Folgende treffen wir deshalb die

Voraussetzung : $\alpha_\ell(x, y, \vec{u}), \beta_\ell(x, y, \vec{u}), \vec{p}_\ell(x, y, \vec{u})$ sind *mindestens einmal stetig differenzierbar*.

Man beachte, daß durch diese Voraussetzung viele Systeme ausgeschlossen werden. Wir wollen nun unter obiger Voraussetzung Normalformen der Differentialgleichungssysteme aufstellen.

3.2 Die Normalform hyperbolischer Systeme

Nach obiger Voraussetzung liegen für ein hyperbolisches System n linear unabhängige genügend oft differenzierbare reelle Eigenvektoren und Eigenwerte

$$\vec{p}_1(x, y, \vec{u}), \dots, \vec{p}_n(x, y, \vec{u}) \quad \text{sowie} \quad \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n(x, y, \vec{u})\tag{3.2.1}$$

als Lösungen von (3.1.2) vor. Sei oBdA. $\alpha_\ell \neq 0$. Dann wird aus (3.0.1) nach Multiplikation mit $\alpha_\ell \vec{p}_\ell^\top$

$$\alpha_\ell \vec{p}_\ell^\top A \vec{u}_x + \alpha_\ell \vec{p}_\ell^\top B \vec{u}_y + \alpha_\ell \vec{p}_\ell^\top \vec{f} = 0,$$

und mit

$$\alpha_\ell \vec{p}_\ell^\top B = \beta_\ell \vec{p}_\ell^\top A$$

erhalten wir

$$\vec{p}_\ell^\top A (\alpha_\ell \vec{u}_x + \beta_\ell \vec{u}_y) + \alpha_\ell \vec{p}_\ell^\top \vec{f} = 0 \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n.$$

Definieren wir die n Richtungsableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_\ell} = \alpha_\ell \frac{\partial}{\partial x} + \beta_\ell \frac{\partial}{\partial y}, \quad (3.2.2)$$

dann erhalten wir Gleichungen der Gestalt

$$\vec{p}_\ell^\top A \frac{\partial}{\partial \gamma_\ell} \vec{u} + \alpha_\ell \vec{p}_\ell^\top \vec{f} = 0 \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n, \quad (3.2.3)$$

die sogenannte **nicht integrable Normalform** des Systems (3.0.1).

Fastlineare hyperbolische Systeme:

In diesem Fall sind $\vec{p}_\ell = \vec{p}_\ell(x, y)$, $A = A(x, y)$ und $B = B(x, y)$ nicht von der Lösung \vec{u} abhängig. Wir können deshalb neue gesuchte Funktionen einführen durch

$$U_\ell := \vec{p}_\ell^\top A \vec{u} \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n. \quad (3.2.4)$$

Wegen $\alpha_\ell \neq 0$ ist hier $\text{Det } A \neq 0$. Zu $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ gibt es Vektoren $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$ mit

$$\vec{p}_\ell^\top \vec{q}_k = \delta_{\ell k} \quad \text{für } \ell, k = 1, \dots, n, \quad (3.2.5)$$

bzw.

$$\sum_{\ell=1}^n p_\ell^{(\rho)} q_\ell^{(\tau)} = \delta_{\rho\tau} \quad \text{für } \rho, \tau = 1, \dots, n, \quad (3.2.6)$$

denn $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ sind linear unabhängig und somit auch $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$. Man zeigt leicht, daß dann $A^{-1} \vec{q}_k$ Rechts-Eigenvektor zu λ_k ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} \vec{p}_\ell^\top (\lambda_k \vec{q}_k - B A^{-1} \vec{q}_k) &= \lambda_k \delta_{\ell k} - \frac{1}{\alpha_\ell} \beta_\ell \vec{p}_\ell^\top A A^{-1} \vec{q}_k \\ &= (\lambda_k - \lambda_\ell) \delta_{\ell k} = 0 \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n; \end{aligned}$$

und folglich wird

$$(\lambda_k A - B) A^{-1} \vec{q}_k = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

erfüllt. Mit (3.2.4) und (3.2.5) gilt demnach die Rücktransformation

$$\vec{u} = \sum_{\ell=1}^n U_\ell A^{-1} \vec{q}_\ell, \quad (3.2.7)$$

und mit

$$\frac{\partial U_\ell}{\partial \gamma_\ell} = \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_\ell} \vec{p}_\ell^\top A \right) \vec{u} + \vec{p}_\ell^\top A \frac{\partial \vec{u}}{\partial \gamma_\ell}$$

erhalten wir die zu (3.0.1) äquivalenten transformierten n Gleichungen

$$\frac{\partial U_\ell}{\partial \gamma_\ell} = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_\ell} (\vec{p}_\ell^\top A) \right) \sum_{j=1}^n U_j A^{-1} \vec{q}_j - \alpha_\ell \vec{p}_\ell^\top \vec{f} \left(x, y, \sum_{j=1}^n U_j A^{-1} \vec{q}_j \right) \right\} \quad (3.2.8)$$

für $\ell = 1, \dots, n$. Die Gleichungen (3.2.8) bilden die sogenannte **Normalform** des fastlinearen hyperbolischen Systems (3.0.1).

3.3 Die Normalform elliptischer Systeme

3.3.1 Lemma: Das System (3.0.1) sei fastlinear und elliptisch und besitze n linear unabhängige genügend glatte Eigenvektoren $\vec{p}_1, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_m, \vec{p}_m$, mit den Eigenwerten $\lambda_{1+}, \bar{\lambda}_{1+}, \dots, \lambda_{m+}, \bar{\lambda}_{m+}$ und mit $m = \frac{n}{2}$, wobei $\text{Im } \lambda_{j+} > 0$ gilt. Mit den komplexwertigen Koeffizienten

$$Q_\ell = \frac{1 + i\lambda_{\ell+}}{1 - i\lambda_{\ell+}}, \quad |Q_\ell| < 1$$

und den neuen komplexwertigen gesuchten Funktionen

$$w_\ell = \vec{p}_\ell^\top \vec{u} \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n \quad (3.3.1)$$

transformiert sich dann das elliptische System (3.0.1) in die komplexe nicht integrable Normalform

$$w_{\ell\bar{z}} + Q_\ell w_{\ell z} = F_\ell \quad \text{für } \ell = 1, \dots, m. \quad (3.3.2)$$

Hierbei gilt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (3.3.3)$$

Aufgabe 32: Man beweise Lemma 3.3.1.

4 Charakteristikenverfahren für hyperbolische Systeme im \mathbb{R}^2

4.1 Fastlineare hyperbolische Systeme im \mathbb{R}^2 [58, 61, 96]

Im **fastlinearen** hyperbolischen Fall seien die charakteristischen Eigenwerte

$$\alpha_\ell = \alpha_\ell(x,y), \quad \beta_\ell = \beta_\ell(x,y), \quad \ell = 1, \dots, n \quad (4.1.1)$$

genügend glatte Funktionen. Die durch

$$\frac{dx_\ell}{ds} = \alpha_\ell(x,y), \quad \frac{dy_\ell}{ds} = \beta_\ell(x,y), \quad \ell = 1, \dots, n \quad (4.1.2)$$

definierten Kurvenscharen heißen **Charakteristiken** des Systems (3.0.1). Wenn α_ℓ, β_ℓ genügend glatt sind, dann bilden die Charakteristiken ein sogenanntes **Gewebe**.

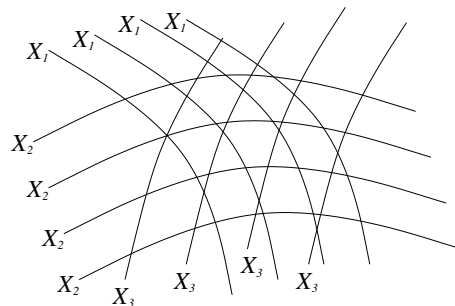


Bild 41: Charakteristisches Gewebe

Für das hyperbolische System (3.0.1) stellen wir das **Cauchysche Anfangswertproblem**

$$\vec{u}(x_0(\tau), y_0(\tau)) = \vec{u}_0(\tau) \quad \text{auf } \mathfrak{c}_0 : x = x_0(\tau), y = y_0(\tau) \quad (4.1.3)$$

und setzen voraus, daß \mathfrak{c}_0 **nirgends charakteristisch ist**, das bedeutet, wir stellen die n Bedingungen

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_0}{d\tau} & \frac{dy_0}{d\tau} \\ \alpha_\ell & \beta_\ell \end{vmatrix}_{\mathfrak{c}_0} \neq 0 \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n. \quad (4.1.4)$$

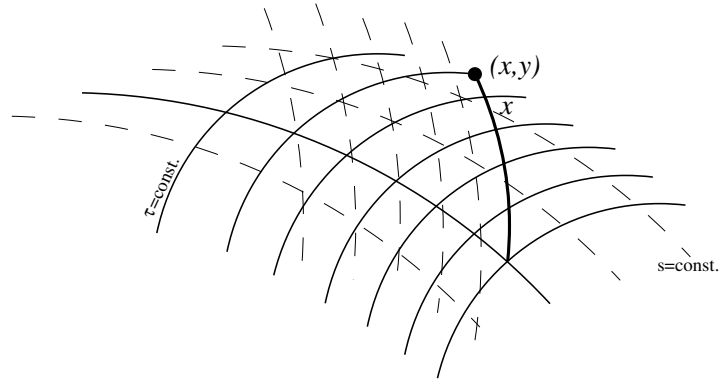


Bild 42: Die ℓ -te Charakteristik von (x,y) zur Anfangskurve
Das System der ℓ -ten Charakteristiken

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_\ell}{\partial s} &= \alpha_\ell(X_\ell, Y_\ell) \quad , \quad \frac{\partial Y_\ell}{\partial s} = \beta_\ell(X_\ell, Y_\ell) \\ X_\ell(0, \tau) &= x_0(\tau) \quad , \quad Y_\ell(0, \tau) = y_0(\tau) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

kann nach dem Satz von Picard–Lindelöf integriert werden und hat *genau eine Lösung*

$$x = X_\ell(s, \tau), \quad y = Y_\ell(s, \tau). \quad (4.1.6)$$

Dies liefert wegen (4.1.4) in einer Umgebung von \mathbf{c}_0 eine ℓ -te Koordinatentransformation, die dort auch nach s und τ aufgelöst werden kann:

$$s = S_\ell(x, y), \quad \tau = T_\ell(x, y), \quad \ell = 1, \dots, n. \quad (4.1.7)$$

Man beachte, daß man jetzt n solche Transformationen benutzen muß!

Das Cauchy–Problem für die Normalform (3.2.8) lautet in der transformierten Form

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\ell}{\partial \gamma_\ell} = U_{\ell x} \alpha_\ell + U_{\ell y} \beta_\ell = F_\ell, \\ U_{\ell|_{\mathbf{c}_0}} = U_\ell^0(\tau) := \vec{p}_\ell^\top A \vec{u}_0|_{\mathbf{c}_0}. \end{cases} \quad (4.1.8)$$

Wegen (4.1.5) gilt entlang der ℓ -ten Charakteristik X_ℓ

$$\frac{\partial}{\partial s} [U_\ell(X_\ell(s, \tau), Y_\ell(s, \tau))] = \frac{\partial U_\ell}{\partial \gamma_\ell} = F_\ell. \quad (4.1.9)$$

Diese Gleichung können wir aufintegrieren für $0 \leq \sigma \leq s = S_\ell(x, y)$ mit $\tau = T_\ell(x, y)$. Es ergibt sich für $\ell = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} U_\ell(x, y) &= U_\ell^0(T_\ell(x, y)) \\ &+ \int_{\sigma=0}^{S_\ell(x, y)} F_\ell(X_\ell(\sigma, T_\ell(x, y)), Y_\ell(\sigma, T_\ell(x, y)), \vec{U}(X_\ell(\sigma, T_\ell(x, y)), Y_\ell(\sigma, T_\ell(x, y)))) d\sigma. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Dies ist ein System *Volterrascher Integralgleichungen*, bei dem die Integrationsgebiete Kurven sind, die vom Endpunkt (x, y) abhängen. (4.1.10) kann durch *sukzessive Approximation* gelöst werden und der Banachsche Fixpunktsatz garantiert Konvergenz und Lösbarkeit.

4.1.1 Satz:

Die Anfangskurve $\mathbf{c}_0 : (x_0(\tau), y_0(\tau))$ sei für $0 \leq \tau \leq T$ stetig differenzierbar und nirgends charakteristisch vorgegeben. Die Eigenwerte $\alpha_\ell(x, y)$, $\beta_\ell(x, y)$ seien stetig differenzierbar und die transformierten Anfangswerte $U_\ell^0(\tau)$ stetig. Die Funktionen $F_\ell(x, y, \vec{U})$ seien in einer Umgebung der Anfangsvorgaben im \mathbb{R}^{2+n} stetig differenzierbar nach U_1, \dots, U_n .

Dann gibt es einen die Anfangskurve enthaltenden Streifen, in dem genau eine stetige Lösung $\vec{U}(x, y)$ existiert, für die stetige Richtungsableitungen $\frac{\partial U_\ell}{\partial \gamma_\ell}$ existieren, die das System (4.1.8) in Normalform erfüllen. Die Lösung kann durch die sukzessive Approximation

$$U_\ell^{(m+1)}(x, y) = U_\ell^0(T_\ell(x, y)) + \int_{\sigma=0}^{S_\ell(x, y)} F_\ell(X_\ell(\sigma, T_\ell(x, y)), Y_\ell(\sigma, T_\ell(x, y)), \vec{U}^{(m)}(X_\ell(\sigma, T_\ell(x, y)), Y_\ell(\dots))) d\sigma$$

mit $U_\ell^{(0)} := U_\ell^0(T_\ell(x, y))$ und $\ell = 1, \dots, n$ (4.1.11)

gewonnen werden. Diese konvergiert in dem Streifen gleichmäßig.

4.1.2 Satz: Sind die Anfangsvorgaben einmal stetig differenzierbar, nirgends charakteristisch und sind α_ℓ , β_ℓ und F_ℓ zweimal stetig differenzierbar, dann ist auch $\vec{U}(x, y)$ in o.g. Streifen stetig differenzierbar und erfüllt das hyperbolische System im klassischen Sinne.

(Beweis siehe in [61]).

Die Probleme aus den Anwendungen führen oft auf **quasilineare Systeme**.

Aufgabe 33:

a) Aus der Kontinuitätsgleichung (1.1.17),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_{(x)}(\rho \vec{v}) = 0,$$

Impulssatz (1.1.21),

$$\vec{v}_t + \left\{ \frac{1}{2} \nabla_x(\vec{v}^2) - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} \right\} = \vec{K} - \frac{1}{\rho} \nabla_x p,$$

Gasgleichung

$$p = (c_p - c_v) \rho \theta$$

und Energiesatz (1.1.27) mit $\lambda = 0$,

$$(\rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2)_t + \operatorname{div}_{(x)} \{ \rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \} + \operatorname{div}_{(x)}(p \vec{v}) = \rho \vec{K} \cdot \vec{v}$$

leite man die zu diesen Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik hinzukommende Entropie-Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x S = 0$$

für glatte Lösungen her. Dabei ist $e = c_v \Theta$ die innere Energie, c_v und c_p die konstanten spezifischen Wärmen, Θ die Temperatur, ρ die Dichte, \vec{v} die Geschwindigkeit, p der Druck, \vec{K} die Massenkraft und

$$S = S_0 + c_v \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) - c_p \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$$

die (physikalische) Entropie.

b) Wie lauten hier bei Stößen die Rankine–Hugoniot–Bedingungen?

4.2 Quasilineare hyperbolische Systeme im \mathbb{R}^2 (nach [38])

Beim quasilinearen System gehen wir oBdA. vom Fall $\alpha_\ell \neq 0$, $\ell = 1, \dots, n$ aus, d.h. $\det A \neq 0$ und setzen $\alpha_\ell \equiv 1$. Dann lautet (3.0.1)

$$\sum_{k=1}^n a^{\ell k}(x, y, \vec{u})(u_x^k(x, y) + \beta_\ell(x, y, \vec{u})u_y^k) + \tilde{f}^\ell(x, y) = 0, \quad \ell = 1, \dots, n, \quad (4.2.1)$$

$$\text{mit } a^{\ell k} = \sum_{\rho=1}^n p_\ell^{(\rho)} A_{\rho k} \quad \text{und } \tilde{f} := \sum_{\rho=1}^n p_\ell^{(\rho)} f^{(\rho)}.$$

Wollte man wie im fastlinearen Fall

$$U^\ell = U^\ell(x, y, \vec{u}) = \sum_{k=1}^n a^{\ell k} u^k$$

einführen, so würde man sich mit

$$U_x^\ell = \sum_{k=1}^n a^{\ell k} u_x^k + \sum_{k=1}^n \left(a_x^{\ell k} + \sum_{j=1}^n a_{u_j}^{\ell k} u_{jx} \right) u^k$$

wieder neue Richtungsableitungen einschleppen. Nach Courant und Lax [38] führen wir deshalb auch die Ableitungen als neue Gesuchte ein und differenzieren zunächst noch einmal das System:

$$\begin{aligned} w^\ell(x, y) &:= u_x^\ell, & v^\ell(x, y) + \sigma^\ell(x, y) &:= u_y^\ell, \\ W^\ell(x, y, \vec{u}) &:= \sum_{k=1}^n a^{\ell k} w^k, & V^\ell(x, y, \vec{u}) &:= \sum_{k=1}^n a^{\ell k} v^k, \quad \ell = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

(4.2.1) liefert dann die Gleichungen

$$W^\ell + \beta_\ell V^\ell + \tilde{f}^\ell + \sum_{k=1}^n \beta_\ell a^{\ell k} \sigma^k = 0. \quad (4.2.3)$$

Differentiation von (4.2.1) nach x liefert

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a^{\ell k} u_x^k)_x + \sum_{k=1}^n a^{\ell k} \beta_\ell u_{xy}^k + \sum_{k=1}^n (a^{\ell k} \beta_\ell)_x u_y^k \\ + \sum_{j,k=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u^j} (a^{\ell k} \beta_\ell) \right\} u_x^j u_y^k + \tilde{f}_x^\ell + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}^\ell}{\partial u^j} u_x^j = 0, \ell = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Einsetzen von (4.2.2) liefert

$$\begin{aligned} W_x^\ell + \beta_\ell W_y^\ell - \sum_{k=1}^n \beta_\ell a_y^{\ell k} w^k - \sum_{j,k=1}^n \beta_\ell \frac{\partial a^{\ell k}}{\partial u^j} (v^j + \sigma^j) w^k + \sum_{k=1}^n (a^{\ell k} \beta_\ell)_x (v^k + \sigma^k) \\ + \sum_{j,k=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u^j} (a^{\ell k} \beta_\ell) \right\} w^j (v^k + \sigma^k) + \tilde{f}_x^\ell + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}^\ell}{\partial u^j} w^j = 0 \end{aligned}$$

bzw. mit

$$w^k = \sum_{j=1}^n a_{kj}^{(-1)} W^j, \quad v^k = \sum_{j=1}^n a_{kj}^{(-1)} V^j$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} W_x^\ell + \beta_\ell W_y^\ell + \sum_{j=1}^n c^{\ell j} W^j + \sum_{k=1}^n d^{\ell k} V^k + \sum_{k=1}^n \left[(a^{\ell k} \beta_\ell)_x - \sum_{j,\rho=1}^n \beta_\ell \frac{\partial a^{\ell j}}{\partial u^k} a_{j\rho}^{(-1)} W^\rho \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u^j} (a^{\ell k} \beta_\ell) \right\} \sum_{\rho=1}^n a_{j\rho}^{(-1)} W^\rho \right] \sigma^k + \tilde{f}_x^\ell = 0 \end{aligned}$$

für $\ell = 1, \dots, n$, wobei die Koeffizienten $d^{\ell k}$ auch von W^j abhängen. Hier stören uns noch die V^k . OBdA. können wir durch eine Drehung des Koordinatensystems immer erreichen, daß $\beta_\ell \neq 0$ gilt. Dann können wir noch V^ℓ aus (4.2.3) berechnen und einsetzen und erhalten ein System der folgenden Gestalt:

$$W_x^\ell + \beta_\ell W_y^\ell + \sum_{j=1}^n C^{\ell j} W^j + \sum_{k=1}^n \varphi_{\ell k} \sigma^k + \tilde{f}_x^\ell = 0, \quad \ell = 1, \dots, n. \quad (4.2.4)$$

Da wir ohnehin das Verschwinden von σ^k erreichen wollen, lösen wir nun das folgende System in Normalform:

$$\begin{cases} u_x^\ell = \sum_{k=1}^n a_{\ell k}^{(-1)} W^k, \\ W_x^\ell + \beta_\ell W_y^\ell = - \sum_{j=1}^n C^{\ell j} W^j - \tilde{f}_x^\ell \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Hinzu kommen die Anfangsvorgaben

$$u^\ell(x_0(\tau), y_0(\tau)) = u_0^\ell(\tau) \quad (4.2.6)$$

sowie

$$W_0^\ell \left(\dot{x}_0 - \frac{1}{\beta_\ell} \dot{y}_0 \right) = \sum_{k=1}^n a^{\ell k} \dot{u}_0^k + \frac{1}{\beta_\ell} \dot{y}_0 \tilde{f}^\ell |_{c_0} , \quad (4.2.7)$$

die sich aus $\dot{u}_0^k = u_x^k \dot{x}_0 + u_y^k \dot{y}_0$ ergeben. Die Bedingung $\dot{x}_0 - \frac{1}{\beta_\ell} \dot{y}_0 \neq 0$ bedeutet wieder, daß die Anfangskurve nicht charakteristisch sein soll.

4.2.1 Satz: Die Lösung des transformierten erweiterten Systems (4.2.5)–(4.2.6) ist äquivalent zum Lösen des Systems (4.2.4) mit $\vec{u}_0(x_0(\tau), y_0(\tau)) = \vec{u}_0(\tau)$. Das Differentialgleichungssystem (4.2.5)–(4.2.6) kann man mit Hilfe des Iterationsverfahrens für das jeweilige Charakteristikenverfahren lösen:

$$u_{(m+1)x}^\ell = \sum_{k=1}^n a_{\ell k}^{(-1)}(x, y, \vec{u}_{(m)}) W_{(m)}^k \quad (4.2.8)$$

$$W_{(m+1)x}^\ell + \beta_\ell(x, y, \vec{u}_{(m)}(x, y)) W_{(m+1)y}^\ell = - \sum_{j=1}^n C^{\ell j}(x, y, \vec{u}_{(m)}, \vec{W}_{(m)}(x, y)) W_{(m)}^j(x, y) - \tilde{f}_x^\ell(x, y, \vec{u}_{(m)}(x, y)), \quad m = 0, 1, \dots$$

mit den Anfangsbedingungen (4.2.7), (4.2.6).

Für den Beweis siehe [38]. Es stellt sich nämlich heraus, dass die Lösung zu (4.2.5) auch das System (4.2.4) mit $\sigma^k = 0$ löst und man so auch eine Lösung des ursprünglichen Systems erhält. Dazu wird gezeigt, dass für diese Lösung auch (4.2.2) und (4.2.3) mit $\sigma = 0$ erfüllt sind.

Weitere Literatur hierzu siehe [36, 70, 113, 116].

Diese Methode wird numerisch im Charakteristikenverfahren nachgebildet.

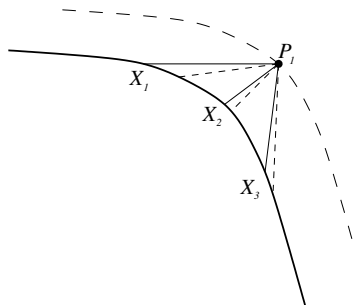


Bild 43: Iteratives Charakteristikenverfahren

Wir setzen zunächst $m = 0$, um die Steigung der Charakteristiken zu ermitteln. Das gibt in P_1 neue Werte u_1^1, \dots . In P_1 kann man eine verbesserte Steigung der Charakteristiken ermitteln. Diese wird beim nächsten Schritt mit den Ausgangssteigungen auf c_0 gemittelt.

Beispiel: Eindimensionale Gasströmungen im Rohr (siehe auch [45]):

$$\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0 \quad (\text{Massenerhaltung}) , \quad (4.2.9)$$

$$v_t + vv_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0 (= K) \quad (\text{Impulserhaltung}) , \quad (4.2.10)$$

$$S_t + vS_x = 0 \quad (\text{Energieerhaltung}) . \quad (4.2.11)$$

Zur Transformation auf Normalform eliminieren wir ρ mit Hilfe der Gasgleichung und führen die lokale Schallgeschwindigkeit ein:

$$a^2 = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa(c_p - c_v)\theta, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (= 1.4 \text{ für Luft}), \quad (4.2.12)$$

wir erhalten

$$a = a_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$$

und

$$\rho = \frac{\kappa p}{a^2} = \frac{\kappa}{a_0^2} p_0^{\frac{2(\kappa-1)}{\kappa}} \cdot p^{\frac{2-\kappa}{\kappa}}$$

($a_0 = 304 \text{ m/sec.}$ für Luft.)

Dann wird aus den Gleichungen (4.2.9)–(4.2.11) das System

$$\frac{1}{\rho \cdot a} (p_t + (v+a)p_x) + v_t + (v+a)v_x = 0 \quad (= K) \quad (4.2.13)$$

$$-\frac{1}{\rho \cdot a} (p_t + (v-a)p_x) + v_t + (v-a)v_x = 0 \quad (= K) \quad (4.2.14)$$

$$S_t + vS_x = 0 \quad (4.2.15)$$

Aufgabe 34:

Ein Rohr der Länge L sei auf einer Seite fest, auf der anderen Seite durch einen beweglichen Kolben verschlossen. Im Rohr befinde sich ruhende Luft konstanter Entropie im Zustand $v_0 = 0$, a_0 , p_0 , ρ_0 . Zur Zeit $t_0 = 0$ werde dem Kolben eine Geschwindigkeit v_E plötzlich so erteilt, daß das Gas expandieren muß. Beschreiben Sie unter Verwendung des Charakteristikenverfahrens ein iteratives Verfahren zur Bestimmung der Zustände $v(x,T)$, $p(x,T)$, $S(x,T)$ für $T > t_0 = 0$.

Auch bei den quasilinearen hyperbolischen Systemen (4.2.2) entstehen im allgemeinen wieder Stoßfronten.

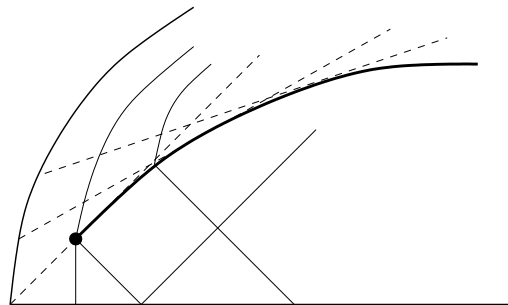
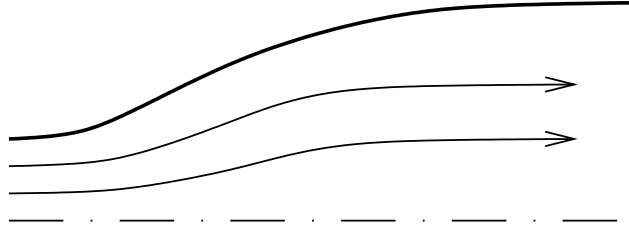
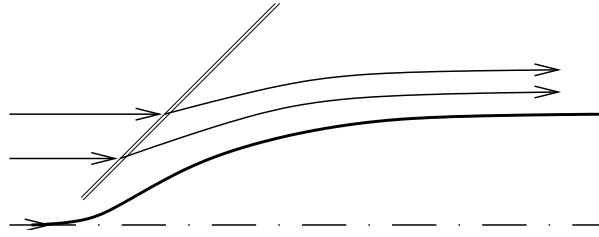


Bild 44: Verhalten zum Stoßbeginn nach F. John

Ein weiteres wichtiges Beispiel quasilinearer hyperbolischer Systeme ist die **Stationäre Rotationssymmetrische Überschallströmung:**

**Bild 45:** Auslauf einer Düse**Bild 46:** Umströmung einer Spindel

Hier schreiben wir das Geschwindigkeitsfeld als

$$\vec{v} = v(\cos \vartheta, \sin \vartheta)^\top$$

mit der Geschwindigkeit v und dem Strömungswinkel ϑ als neue gesuchte Funktionen.

Im Überschallbereich lauten die Gleichungen für isentrope wirbelfreie rotationssymmetrische Strömungen

$$U_\alpha = \frac{\cot \gamma}{v} v_\alpha - \vartheta_\alpha = \frac{\sin \gamma \sin \vartheta}{r}$$

und

$$V_\beta = \frac{\cot \gamma}{v} v_\beta - \vartheta_\beta = \frac{\sin \gamma \sin \vartheta}{r}$$

(4.2.16)

mit den Richtungsableitungen

$$\begin{aligned} \alpha : \frac{dx}{ds} &= \cos(\vartheta + \gamma) & \frac{dr}{ds} &= \sin(\vartheta + \gamma) \\ \beta : \frac{dx}{ds} &= \cos(\vartheta - \gamma) & \frac{dr}{ds} &= \sin(\vartheta - \gamma). \end{aligned}$$

(4.2.17)

Für den *Machschen Winkel* γ mit

$$\cot^2 \gamma = \frac{v^2}{a^2} - 1 = \frac{v^2 - a^2}{a_*^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}v^2},$$

(4.2.18)

lautet die Bernoullische Gleichung längs jeder Stromlinie:

$$\frac{\kappa-1}{\kappa+1}v^2 + \frac{2}{\kappa+1}a^2 = a_*^2 = \frac{\kappa-1}{\kappa+1}v_1^2 + \frac{2}{\kappa+1}a_1^2 = \frac{2}{\kappa+1}a_0^2.$$

(4.2.19)

Wie wir sehen, hat (4.2.16) bereits die integrable Normalform, und wir können hier neue gesuchte Funktionen U und V einführen:

$$\begin{aligned} U &= \int_{a_*}^v \left\{ \frac{\tilde{v}^2 - a_*^2}{a_*^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \tilde{v}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} - \vartheta. \\ V &= \int_{a_*}^v \left\{ \frac{\tilde{v}^2 - a_*^2}{a_*^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \tilde{v}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} + \vartheta. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Dies ist hier deshalb möglich, weil die Integranden in (4.2.20) nicht von x oder t abhängen!

In der $\vartheta - v$ Ebene, der Hodographenebene sind $U = \text{konst.}$ und $V = \text{konst.}$ Epizykloiden. Damit erhält man Charakteristikenverfahren auch in der Hodographenebene.

4.3 Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension und Riemann–Invarianten (nach [41])

Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension mit einem nur von der Lösung $\vec{u}(x,t) = (u_1(x,t), \dots, u_n(x,t))^\top$ abhängendem Flussvektor $\vec{Q}(\vec{u})$ haben die Gestalt

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{Q}(\vec{u}(x,t))) = \vec{0} \quad (4.3.1)$$

bzw.

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_\ell}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial u_\ell}{\partial t} = 0, \quad \ell = 1, \dots, n. \quad (4.3.2)$$

Hier sind die Koeffizientenmatrizen also gegeben als

$$a_j^\ell(\vec{u}) = \frac{\partial Q_\ell}{\partial u_j}(\vec{u}), \quad b_j^\ell = \delta_j^\ell. \quad (4.3.3)$$

Im strikt hyperbolischen Fall gibt es dann zu jedem Zustand $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ n verschiedene reelle Eigenwerte von (3.1.3):

$$\mu_1(\vec{u}) < \mu_2(\vec{u}) < \dots < \mu_n(\vec{u}), \quad (4.3.4)$$

mit $\alpha_\ell = \mu_\ell$, $\beta_\ell = 1$ und zugehörige Links–Eigenvektoren $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$:

$$\sum_{k=1}^n p_{\ell k} \frac{\partial Q_k}{\partial u_j} = \mu_\ell p_{\ell j} \quad \text{für } \ell, j = 1, \dots, n \quad (4.3.5)$$

und $\vec{p}_\ell = (p_{\ell 1}, \dots, p_{\ell n})^\top$.

Die Rechts–Eigenvektoren $\vec{q}_\ell = (q_{\ell 1}, \dots, q_{\ell 2})^\top$ erfüllen die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_k}{\partial u_j} q_{\ell j} = \mu_{\ell} q_{\ell k} \quad \text{für } k = 1, \dots, n \quad (4.3.6)$$

und

$$\vec{p}_k^\top \vec{q}_\ell = \delta_{\ell k}. \quad (4.3.7)$$

Definition: Das System (4.3.1) besitzt ein Koordinatensystem $w_1(\vec{u}), \dots, w_n(\vec{u})$ von **Riemann-Invarianten**, falls die Gleichungen

$$\frac{\partial w_k}{\partial u_\ell} = p_{k\ell}(\vec{u}) \quad \text{für } \ell, k = 1, \dots, n \quad (4.3.8)$$

erfüllt sind, d.h.

$$\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial w_k}{\partial u_\ell} q_{j\ell} = \delta_{jk}. \quad (4.3.9)$$

4.3.1 Lemma: Ein Koordinatensystem von Riemann-Invarianten existiert genau dann, wenn die $\frac{n(n-1)}{2}$ Integralitätsbedingungen

$$\frac{\partial p_{k\ell}}{\partial u_j} - \frac{\partial p_{kj}}{\partial u_\ell} = 0 \quad \text{für } j < \ell, \quad j, \ell = 1, \dots, n \quad (4.3.10)$$

erfüllt sind.

Beweis: Aus (4.3.8) entnehmen wir die Pfaffschen Gleichungen

$$dw_k = \sum_{\ell=1}^n p_{k\ell} du_\ell \quad \text{für } k = 1, \dots, n. \quad (4.3.11)$$

Folglich muss gelten

$$[d \wedge dw_k] = \sum_{\ell=1}^n [dp_{k\ell} \wedge du_\ell] = 0,$$

also

$$[d \wedge dw_k] = \sum_{j < \ell} \left(\frac{\partial p_{k\ell}}{\partial u_j} - \frac{\partial p_{kj}}{\partial u_\ell} \right) [du_j \wedge du_\ell] = 0,$$

d.h. (4.3.10) ist notwendig.

Sind andererseits die Gleichungen (4.3.10) erfüllt, so ist das Pfaffsche System

$$\omega_k := dw_k - \sum_{\ell=1}^n p_{k\ell}(\vec{u}) du_\ell = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

vollständig integrabel, und nach Satz 2.3.1 existieren Funktion $w_1(\vec{u}), \dots, w_n(\vec{u})$, wenn die Werte von $w_k(\vec{u}_0)$ in einem Punkt $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben werden. \square

Bemerkung: Im Fall $n = 2$ ist (4.3.10) nur je eine Gleichung für $k = 1$ bzw. $k = 2$ und führt auf je eine lineare partielle Differentialgleichung für $\varrho_k(\vec{u}) = \{\vec{p}_k^\top \vec{p}_k\}^{\frac{1}{2}}$, die man im \vec{u} -Raum mit $\varrho_k \neq 0$ immer lösen kann.

4.3.2 Satz: Das System (4.3.1) für $\vec{u}(x,t) \in C^1$ und die Gleichungen

$$\frac{\partial w_\ell}{\partial \gamma_\ell} = \mu_\ell \frac{\partial w_\ell}{\partial x} + \frac{\partial w_\ell}{\partial t} = 0, \quad \ell = 1, \dots, n \quad (4.3.12)$$

zueinander äquivalent. Entlang den Charakteristiken mit

$$\frac{dx_\ell}{dt} = \mu_\ell \quad (4.3.13)$$

sind die Riemann–Invarianten w_ℓ konstant.

Der Beweis ist eine einfache Anwendung der Kettenregel unter Beachtung von (4.3.8) und der nichtintegrablen Normalform (3.2.3) mit \vec{f} und $\vec{0}$. Wir stellen dies als Aufgabe.

Man beachte, dass der Satz die Äquivalenz nur dort liefert, wo die Lösung stetig differenzierbar ist, also nicht über Stöße hinweg! Ein Beispiel für Riemann–Invarianten sind die Funktionen U und V in (4.2.20).

Motiviert durch das Euler–System der Gasdynamik definieren wir zum System (4.3.1) das Paar einer Entropie $\eta(\vec{u})$ mit dem Entropiefluss $\zeta(\vec{u})$, wenn diese Funktionen das (für $n \geq 3$ überbestimmte) System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u_j}(\vec{u}) = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial u_\ell} \frac{\partial Q_\ell}{\partial u_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.3.14)$$

im Zustandsraum erfüllen und darüber hinaus die Hesse–Matrix von η konvex ist:

$$\vec{q}_\ell^\top \left(\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial u_j \partial u_k} \right)_{n \times n} \right) \vec{q}_\ell > 0, \quad \ell = 1, \dots, n. \quad (4.3.15)$$

Wenn ein solches Entropiepaar existiert, folgen aus der Viskositätsbedingung (wie früher in §1.10 für eine skalare Gleichung) jetzt für das System die Entropiebedingungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\vec{u}(x,t)) + \frac{\partial}{\partial x} \zeta(\vec{u}(x,t)) \leq 0 \quad (4.3.16)$$

im distributionellen, d.h. schwachen Sinn für jedes Entropiepaar η, ζ .

Offensichtlich sind die Gleichungen (4.3.14) zu der Pfaffschen Differentialgleichung

$$\omega := d\zeta - \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial u_\ell} dQ_\ell = 0 \quad (4.3.17)$$

äquivalent, und wir sehen, dass es nur dann Entropiepaare geben kann, wenn die Integrierbarkeitsbedingung

$$[d \wedge \omega] = - \sum_{\ell, k=1}^n \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u_\ell \partial u_k} du_k \wedge dQ_\ell \right] = 0 \quad (4.3.18)$$

erfüllt ist, d.h. $\eta(\vec{u})$ muss die $\frac{1}{2}n(n-1)$ partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 \eta}{\partial u_\ell \partial u_k} \frac{\partial Q_\ell}{\partial u_m} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial u_\ell \partial u_m} \frac{\partial Q_\ell}{\partial u_k} = 0 \quad \text{für } m < k \quad (4.3.19)$$

mit $m, k = 1, \dots, n$ erfüllen!!

4.3.3 Satz: *Besitzt das System (4.3.1) ein Koordinatensystem von Riemann–Invarianten w_1, \dots, w_n , so geht das System (4.3.14) über in*

$$\frac{\partial \zeta}{\partial w_\ell} = \mu_\ell \frac{\partial \zeta}{\partial w_\ell} \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n, \quad (4.3.20)$$

und die Integrabilitätsbedingungen lauten folglich

$$(\mu_m - \mu_k) \frac{\partial^2 \eta}{\partial w_m \partial w_k} + \frac{\partial \eta}{\partial w_m} \frac{\partial \mu_m}{\partial w_k} - \frac{\partial \eta}{\partial w_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial w_m} = 0 \quad \text{mit } m < k \quad (4.3.21)$$

und $m, k = 1, \dots, n$.

Dieses ‘‘Goursat System’’ ist ein lineares hyperbolisches System zweiter Ordnung, das sich durch Integrationen nach w_m und w_k immer lösen lässt.

Beweis: Für das Koordinatensystem der Riemann–Invarianten gelten

$$q_{i\ell} = \frac{\partial u_\ell}{\partial w_i} \quad \text{und} \quad p_{ik} = \frac{\partial w_i}{\partial u_k}.$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial u_\ell} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial w_i} \frac{\partial w_i}{\partial u_\ell} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial w_i} p_{i\ell}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial w_i} \sum_{\ell=1}^n p_{i\ell} \frac{\partial Q_\ell}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial w_i} \mu_i p_{ij}, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \zeta}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial w_\ell} &= \frac{\partial \zeta}{\partial w_\ell} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial w_i} \mu_i p_{ij} q_{\ell j} = \mu_\ell \frac{\partial \eta}{\partial w_\ell}. \end{aligned}$$

Also haben wir

$$d\zeta = \sum_{\ell=1}^n \mu_\ell \frac{\partial \eta}{\partial w_\ell} dw_\ell,$$

und $[d \wedge d\zeta] = 0$ liefert die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial w_m} \left(\mu_k \frac{\partial \eta}{\partial w_k} \right) - \frac{\partial}{\partial w_k} \left(\mu_m \frac{\partial \eta}{\partial w_m} \right) = 0,$$

das ist (4.3.21).

Den Beweis bezüglich der Lösung des Goursat–Problems überlassen wir dem Leser. \square

Für die Kruzkov–Theorie für Systeme der Gestalt (4.3.1) verweisen wir auf die Arbeit von Dafermos [39] und das Buch von Holden und Risebro [64].

Aufgabe 35: Man beweise Satz 4.3.2.

5 Der Existenzsatz von Cauchy–Kowalewskaya

(Nach [58] §1.2) In den vorangegangenen Abschnitten haben wir das Cauchy-Problem für **hyperbolische** Systeme von Gleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen gelöst, wobei auch eine Differentialgleichung erster Ordnung zu diesem Aufgabentyp gerechnet werden kann. Damit stellt sich die Frage, ob das Cauchysche Anfangswertproblem auch für nichthyperbolische Systeme gelöst werden kann. Es stellt sich heraus, daß dies, allerdings unter sehr starken Voraussetzungen, unabhängig vom Typ möglich ist. Wir wollen dazu zunächst ein System erster Ordnung für drei gesuchte Funktionen in zwei Unabhängigen als Modellfall behandeln.

Das Anfangswertproblem lautet: *Finde $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}(x, y)$ zu*

$$\begin{aligned}\hat{u}_y &= \hat{F}_1(x, y, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{u}_x, \hat{v}_x, \hat{w}_x) \quad , \\ \hat{v}_y &= \hat{F}_2(\dots), \\ \hat{w}_y &= \hat{F}_3(\dots),\end{aligned}\tag{5.0.1}$$

$$\hat{u}(x, 0) = \hat{u}_0(x), \quad \hat{v}(x, 0) = \hat{v}_0(x), \quad \hat{w}(x, 0) = \hat{w}_0(x).\tag{5.0.2}$$

Wir nehmen jetzt an, dass alle Vorgaben reell analytisch in einer Umgebung der Anfangsvorgaben bei $x = 0$ sind und es eine dort reell analytische Lösung gibt. Dann kann man die Lösung in der Umgebung der Anfangsvorgaben in eine Taylor-Reihe entwickeln. Einsetzen aller Taylor-Reihen liefert dann Gleichungen für die Taylor-Koeffizienten der gesuchten Lösungsfunktionen. Die Berechnung der Taylor-Koeffizienten kann *rekursiv* geschehen. Dies ist bereits von Cauchy beschrieben worden und legt die Entwicklungskoeffizienten eindeutig fest. Deshalb ist die **analytische** Lösung auch eindeutig.

5.1 Der Cauchysche Algorithmus

Wir wollen hier die Cauchysche rekursive Methode vorführen. Wenn die Koeffizienten bekannt sind, bleibt dann noch die Konvergenz der formalen Taylor-Reihe der Lösung zu zeigen. Dies geschieht mit der sogenannten **Majorantenmethode**, die von Frau Kowalewskaya entwickelt wurde.

Für die Cauchysche Methode transformieren wir zuerst die gesuchten Funktionen mit

$$\begin{aligned}u(x, y) &:= \hat{u}(x, y) - \hat{u}_0(x) - y \cdot \hat{F}_1(0, 0, \hat{u}_0(0), \dots, \hat{w}'_0(0)), \\ v(x, y) &:= \hat{v}(x, y) - \hat{v}_0(x) - y \cdot \hat{F}_2(0, 0, \hat{u}_0(0), \dots, \hat{w}'_0(0)), \\ w(x, y) &:= \hat{w}(x, y) - \hat{w}_0(x) - y \cdot \hat{F}_3(0, 0, \hat{u}_0(0), \dots, \hat{w}'_0(0)).\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Dann nimmt das Anfangswertproblem (5.0.1), (5.0.2) die neue Gestalt

$$\begin{aligned} u_y &= F_1(x, y, u, v, w, u_x, v_x, w_x), \\ v_y &= F_2(x, y, u, v, w, u_x, v_x, w_x), \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

$$\begin{aligned} w_y &= F_3(x, y, u, v, w, u_x, v_x, w_x), \\ u(x, 0) &= 0, v(x, 0) = 0, w(x, 0) = 0, \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

an, und die Funktionen F_i sind in einer Umgebung von 0 reell analytisch. Wir machen nun den Lösungsansatz

$$u(x, y) = \sum_{i, k=0}^{\infty} a_{ik} x^i y^k, \quad v = \sum_{i, k=0}^{\infty} b_{ik} x^i y^k, \quad w = \sum_{i, k=0}^{\infty} c_{ik} x^i y^k. \quad (5.1.4)$$

Cauchy's Algorithmus bezieht sich dann auf die Berechnung der Ableitungen

$$i!k!a_{ik} = \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k}(0, 0), \quad i!k!b_{ik} = \frac{\partial^{i+k} v}{\partial x^i \partial y^k}(0, 0), \quad i!k!c_{ik} = \frac{\partial^{i+k} w}{\partial x^i \partial y^k}(0, 0). \quad (5.1.5)$$

Wegen (5.1.3) erhalten wir für $n = 0, 1, 2, \dots$ im Nullpunkt die folgenden Gleichungen:

k=0:

$$n!a_{n0} = \frac{\partial^n u(x, 0)}{\partial x^n} \Big|_{x=0} = 0, \quad n!b_{n0} = \frac{\partial^n w(x, 0)}{\partial x^n} \Big|_{x=0} = 0, \quad n!c_{n0} = \frac{\partial^n v(x, 0)}{\partial x^n} \Big|_{x=0} = 0. \quad (5.1.6)$$

Für die ersten Ableitungen nach y benutzen wir die Differentialgleichungen (5.1.2):

k=1:

$$\begin{aligned} a_{01} &= u_y(0, 0) = F_1(0, \dots, 0) \\ a_{11} &= u_{xy}(0, 0) = F_{1x}(0) + F_{1u}|_0 u_x(0, 0) + \dots + F_{1p_3}|_0 w_{xx}(0, 0), \end{aligned}$$

und wegen der vielen Nullen in (5.1.6) ergeben sich

$$n!a_{n1} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \frac{\partial}{\partial y} u \right) (0, 0) = \frac{\partial^n F_1}{\partial x^n} \Big|_0 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1.7)$$

und die entsprechenden Gleichungen für $n!b_{n1}$, $n!c_{n1}$. Hier setzen wir jetzt die Potenzreihen von F_j ein,

$$F_j(\xi_1, \dots, \xi_8) = \sum_{i_1, \dots, i_8=0}^{\infty} \beta_{i_1, \dots, i_8}^j \xi_1^{i_1} \dots \xi_8^{i_8} \quad (5.1.8)$$

und erhalten die Gleichungen

$$n!a_{n1} = n!\beta_{n0\dots0}^1 n!b_{n1} = n!\beta_{n0\dots0}^2, \quad c_{n1}n! = n!\beta_{n0\dots0}^3 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1.9)$$

k=2:

Jetzt differenzieren wir (5.1.2) nochmals und bekommen

$$\begin{aligned} 2!a_{02} &= u_{yy} \Big|_0 = \frac{\partial}{\partial y} [F_1(x, y, u(x, y), \dots, w_x(x, y))] \Big|_0 \\ &= F_{1y} \Big|_0 + F_{1u} u_y \Big|_0 + \dots + F_{1p_3} \cdot w_{xy} \Big|_0 \end{aligned}$$

bzw.

$$n!2!a_{n2} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} [F_{1y} + F_{1u}u_y + \cdots + F_{1p_3}w_{yx}]|_0 \quad (5.1.10)$$

und die entsprechenden Gleichungen für $n!2!b_{n2}$ mit F_2 sowie für $n!2!c_{n2}$ mit F_3 .

Man beachte, daß rechts Produkt- und Kettenregel verwendet werden müssen. Dort kommen dann von u, v, w in Bezug auf y Ableitungen nur bis zur Ordnung 1, d.h. nur Koeffizienten a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} mit $0 \leq k \leq 1$ vor, $i \leq n+1$.

Setzen wir auch noch (5.1.8) ein, so erhalten wir einen Ausdruck der Gestalt

$$n!2!a_{n2} = \Psi(a_{j0}, a_{j1}, \dots, c_{j1}, \beta_{i_1, \dots, i_8}^1) \quad (5.1.11)$$

mit $0 \leq j \leq n+1, \quad i_1 + \cdots + i_8 \leq n+1,$

wobei Ψ ein **Polynom mit positiven Koeffizienten** ist, die **nicht** von a_{jk} oder von $\beta_{i_1, \dots, i_8}^1$ abhängen. Ersetzen wir a_{j0}, \dots, c_{j1} aus (5.1.6) und (5.1.9), so erhalten wir schließlich

$$a_{n2} = \mathcal{P}_{n2}^1(\beta_{i_1, \dots, i_8}^j) \quad , \quad i_1 + \cdots + i_8 \leq n+1, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.1.12)$$

wobei \mathcal{P}_{n2}^1 für jedes n ein Polynom ist mit nichtnegativen Koeffizienten, die von F_1, F_2, F_3 und von u, v, w **nicht** abhängen. Entsprechend ergeben sich beim k -ten Schritt die Koeffizienten a_{nk}, b_{nk} und c_{nk} als

$$a_{nk} = \mathcal{P}_{nk}^1(\beta_{i_1, \dots, i_8}^j), \quad b_{nk} = \mathcal{P}_{nk}^2(\beta_{i_1, \dots, i_8}^j), \quad c_{nk} = \mathcal{P}_{nk}^3(\beta_{i_1, \dots, i_8}^j) \quad (5.1.13)$$

mit $i_1 + \cdots + i_8 \leq n+k-1$ für $j = 1, 2, 3$ durch rekursives Einsetzen. Alle diese Polynomausdrücke haben nichtnegative Koeffizienten.

Die Taylor-Koeffizienten sind demnach alle rekursiv berechenbar und eindeutig festgelegt. Dieses rekursive Verfahren kann mit formelmäßigem Differenzieren auch programmiert werden und ist konstruktiv.

Aufgabe 36:

Wir betrachten das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{w} = (u, v)$ einer stationären ebenen isentropen wirbelfreien kompressiblen Gasströmung. Diese erfüllt die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_y - v_x &= 0 \quad , \\ (a^2 - u^2)u_x - 2uvw_x + (a^2 - v^2)v_y &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\kappa - 1}{2}(a_*^2 - u^2 - v^2), \quad \kappa = \text{konst.} > 1 \quad , \\ u^2 + v^2 &\leq a_*^2 \quad \text{mit} \quad a_*^2 = \frac{2}{\kappa + 1}a_0^2. \end{aligned}$$

a) Man prüfe, ob es in einer Umgebung von $(x, y) = (0, 0)$ für analytische Vorgaben

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad v(x, 0) = 0$$

eine Lösung gibt.

b) Für die Vorgaben

$$\begin{aligned} u(x,0) &= a_1 + cx \quad , \quad v(x,0) = 0 \quad , \\ a_1 &= \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} a_* \quad , \quad c > 0 \end{aligned}$$

berechne man die Reihenentwicklung der Lösung bis zu den Gliedern vierter Ordnung. Man gebe in der Umgebung des Nullpunktes entsprechend den Verlauf der Stromlinien an und bestimme unter Berücksichtigung von Gliedern bis zur zweiten Ordnung den Verlauf der Schallgrenze $u^2 + v^2 = a^2$.

5.2 Der Konvergenzbeweis von Frau Kowalewskaya

5.2.1 Satz (von Cauchy–Kowalewskaya):

Alle vorgegebenen Funktionen in (5.0.1) und (5.0.2) seien in der Umgebung von $x = 0$ und einer Umgebung der Anfangsbedingungen reell analytisch bezüglich aller Veränderlichen. Dann gibt es in einer geeigneten Umgebung der Anfangsdaten genau eine reell analytische Lösung.

Für den Beweis von Satz 5.2.1 betrachten wir zunächst den folgenden Spezialfall.

5.2.2 Hilfssatz:

Sei $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_8)$ Majorante zu F_j für $j = 1, 2, 3$ und sei $Z_0(x)$ Majorante zu u_0, v_0, w_0 . Wenn das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} Z_y = V_y = W_y &= \Phi(x, y, Z, V, W, Z_x, V_x, W_x), \\ Z(x, 0) = V(x, 0) = W(x, 0) &= Z_0(x) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

in der Umgebung von 0 eine analytische Lösung besitzt, dann hat auch (5.1.2), (5.1.3) dort eine analytische Lösung und diese kann dann mit dem Cauchyschen Algorithmus berechnet werden.

Beweis: Die Funktion Φ von 8 Variablen ist reell analytisch, kann also in einer Umgebung des Ursprungs durch ihre Potenzreihe

$$\Phi(\xi_1, \dots, \xi_8) = \sum_{i_1, \dots, i_8}^{0, \infty} \alpha_{i_1, \dots, i_8} \xi_1^{i_1} \cdots \xi_8^{i_8},$$

dargestellt werden. Das Gleiche gilt für die Anfangsvorgaben

$$Z_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j.$$

Nach Voraussetzung gelten die Majorantenbedingungen

$$|\beta_{i_1, \dots, i_8}^j| \leq \alpha_{i_1, \dots, i_8}, |u_{0j}|, |v_{0j}|, |w_{0j}| \leq c_j. \quad (5.2.2)$$

Mit dem Cauchyschen Algorithmus finden wir sowohl

$$a_{nk} = \mathcal{P}_{nk}^1(\beta_{i_1, \dots, i_8}^1, \beta_{i_1, \dots, i_8}^2, \beta_{i_1, \dots, i_8}^3, u_{0j}, v_{0j}, w_{0j})$$

als auch

$$A_{nk} = \mathcal{P}_{nk}^1(\alpha_{i_1, \dots, i_8}^1, \alpha_{i_1, \dots, i_8}^2, \alpha_{i_1, \dots, i_8}^3, c_j, c_j, c_j)$$

mit den **gleichen Polynomen \mathcal{P}_{nk}^1 mit nichtnegativen Koeffizienten**. Folglich gilt

$$\begin{aligned} |a_{nk}| &\leq \mathcal{P}_{nk}^1(|\beta_{i_1, \dots, i_8}^1|, |\beta_{i_1, \dots, i_8}^2|, |\beta_{i_1, \dots, i_8}^3|, u_{0j}, v_{0j}, w_{0j}) \\ &\leq \mathcal{P}_{nk}^1(\alpha_{i_1, \dots, i_8}^1, \alpha_{i_1, \dots, i_8}^2, \alpha_{i_1, \dots, i_8}^3, c_j, c_j, c_j) = A_{nk} \end{aligned}$$

für alle n und k . □

Beweis von Satz 5.2.1: Für die Konvergenz der formalen Potenzreihen brauchen wir nach Hilfssatz 5.2.2 also Majoranten. Dazu beobachten wir, daß aus der Konvergenz von

$$F_j = \sum_{i_1, \dots, i_8=0}^{\infty} \beta_{i_1 \dots i_8}^j \xi_1^{i_1} \dots \xi_8^{i_8} \quad \text{für } |\xi|^2 \leq \varrho_0^2 < R^2$$

die Beschränktheit

$$|\beta_{i_1 \dots i_8}^j \xi_1^{i_1} \dots \xi_8^{i_8}| \leq M_{\varrho_0}$$

mit einer geeigneten Konstanten M_{ϱ_0} folgt. Daraus ergeben sich die Koeffizientenabschätzungen

$$|\beta_{i_1 \dots i_8}^j| \leq \varrho_0^{-i_1 - \dots - i_8} M_{\varrho_0},$$

und F_j konvergiert absolut für $|\xi| < \varrho_0$, das bedeutet

$$\sum_{i_1, \dots, i_8=0}^{\infty} |\beta_{i_1 \dots i_8}^j \xi_1^{i_1} \dots \xi_8^{i_8}| \leq M \quad \text{für } |\xi|^2 \leq \varrho_1 < \varrho_0.$$

Insbesondere gilt dann

$$|\beta_{i_1 \dots i_8}^j| \leq \frac{M}{\varrho^{i_1 + i_8}} \quad \text{für } 0 < \varrho < \min\{\varrho_1, 6M\}. \quad (5.2.3)$$

Ausserdem gelten $\beta_{0 \dots 0}^j = 0$. Die Konstante $\varrho > 0$ mit (5.2.3) wird für das Folgende beliebig, fest gewählt. Mit ϱ definieren wir die reell analytische Funktion

$$\Phi := -M + M \left\{ \left(1 - \frac{6M}{\varrho} y + x \right) \left(1 - \frac{z + v + w}{\varrho} \right) \left(1 - \frac{z_x + v_x + w_x}{\varrho} \right) \right\}^{-1} \quad (5.2.4)$$

sowie $Z_0(x) = 0$. Für Φ ergibt sich aus dem Produkt geometrischer Reihen die Potenzreihe

$$\begin{aligned}\Phi(\xi_1^{i_1} \dots \xi_8^{i_8}) &= \sum_0^\infty \alpha_{i_1 \dots i_8} \xi_1^{i_1} \dots \xi_8^{i_8} \\ &= -M + M \sum_{\ell_1=0}^\infty \left(\frac{6M\xi_2 + \xi_1}{\varrho} \right)^{\ell_1} \cdot \sum_{\ell_2=0}^\infty \left(\frac{\xi_3 + \xi_4 + \xi_5}{\varrho} \right)^{\ell_2} \sum_{\ell_3=0}^\infty \left(\frac{\xi_6 + \xi_7 + \xi_8}{\varrho} \right)^{\ell_3},\end{aligned}$$

und offensichtlich gelten $\alpha_{0\dots 0} = 0$ sowie

$$|\beta_{i_1 \dots i_8}^j| \leq \frac{M}{\varrho^{i_1 + i_8}} \leq \alpha_{i_1 + i_8} \quad \text{für alle Multiindices } i \text{ mit } |i| > 0.$$

Demnach ist Φ nach (5.2.4) Majorante zu jeder der Funktionen F_j , d.h. die Lösung von

$$\begin{cases} Z = V = W \\ Z_y = -M + M \left\{ \left(1 - \frac{6M}{\varrho} \frac{y+x}{\varrho} \right) \left(1 - \frac{3Z}{\varrho} \right) \left(1 - \frac{3Z_x}{\varrho} \right) \right\}^{-1} \\ Z(x,0) = 0 \end{cases} \quad (5.2.5)$$

ist Majorante zu (5.1.2), (5.1.3).

(5.2.5) können wir aber leider auch nicht explizit lösen. Wir wenden deshalb den Majorantensatz nochmals an. Dazu betrachten wir zu

$$\xi = \frac{\varrho}{6M}x + y \quad \text{die Funktion } G(x,y) := U\left(\frac{\varrho}{6M}x + y\right), \quad (5.2.6)$$

und $U(\xi)$ sei die Lösung von

$$\begin{aligned}U' &= -M + M \left\{ \left(1 - \frac{6M}{\varrho^2} \xi \right) \left(1 - \frac{3}{\varrho} U \right) \left(1 - \frac{1}{2M} U' \right) \right\}^{-1}, \\ U(0) &= 0.\end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Dann genügt $G(x,y) = U\left(\frac{\varrho}{6M}x + y\right)$ der selben Differentialgleichung wie Z in (5.2.5), jedoch gilt

$$G(x,0) = U\left(\frac{\varrho}{6M}x\right). \quad (5.2.8)$$

Nun aber sind die Taylor–Koeffizienten der rechten Seite in (5.2.7) alle nicht–negativ, und wenn (5.2.7) überhaupt eine analytische Lösung hat, dann berechnen sich ihre Koeffizienten aus dem Cauchy–Algorithmus, d. h. diese sind alle nicht–negativ. Demnach sind die Taylor–Koeffizienten auch in (5.2.8) nicht negativ und nach Hilfssatz 5.2.2 ist $G(x,y)$ Majorante zu Z .

(5.2.7) ist nur noch eine gewöhnliche Differentialgleichung und, nach U' aufgelöst, lautet sie:

$$\begin{aligned}U' &= \frac{M}{2} \left\{ 1 - \left(9 - \frac{8}{\left(1 - \frac{6M}{\varrho^2} \xi \right) \left(1 - \frac{3}{\varrho} U \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} =: f(\xi, U) \\ &= \frac{M}{2} \left\{ 1 - h \sqrt{1 - \varphi/h^2} \right\} \\ &= \frac{M}{2} \left\{ 1 - h + \frac{1}{2} \frac{\varphi}{1! \cdot h} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \frac{\varphi^2}{2! h^3} + \dots \right\}\end{aligned} \quad (5.2.9)$$

mit

$$\varphi = 8 \left\{ \left(1 - \frac{6M}{\varrho^2} \xi \right) \left(1 - \frac{3}{\varrho} U \right) \right\}^{-1} = 8 \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \left(\frac{6M}{\varrho^2} \xi \right)^{\ell_1} \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \left(\frac{3U}{\varrho} \right)^{\ell_2}$$

und $h = 3$. Also hat die Potenzreihe

$$f(\xi, U) = \sum_{j+k>0} f_{jk} \xi^j U^k$$

nur positive Koeffizienten f_{jk} .

Die Differentialgleichung (5.2.9) ist uns immer noch zu umständlich. Sei

$$\overline{M} := \text{Max} \left\{ |f| \text{ für } \frac{6M}{\varrho^2} |\xi| \leq \frac{1}{20} \text{ und } \frac{3}{\varrho} |U| \leq \frac{1}{20} \right\}.$$

Dann bestimmen wir die Lösung $H(\xi)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} H' &= \overline{M} \left\{ \left(1 - \frac{\xi}{R_0} \right) \left(1 - \frac{H}{R_0} \right) \right\}^{-1} \text{ für } |\xi| < R_0, |H| < R_0, \\ H(0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Wir verwenden die gleiche Argumentation wie schon einmal beim Übergang von F_j zu Φ . Die rechte Seite in (5.2.10) ist für genügend kleines $R_0 > 0$ Majorante zu f , somit ist $H(\xi)$ nach Hilfssatz 5.2.2 Majorante zu $U(\xi)$, falls $H(\xi)$ existiert. Diese Lösung $H(\xi)$ von (5.2.10) können wir explizit angeben:

$$\begin{aligned} H(\xi) &= R_0 - R_0 \sqrt{1 - 2\overline{M} \ln(1 - \xi/R_0)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} c_j \xi^j \text{ mit Koeffizienten } c_j > 0. \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Wir können also zusammenfassen:

1. In einer Umgebung von 0 existiert eine analytische Lösung $H(\xi)$ von (5.2.10). Dann ist $H(\xi)$ Majorante zur formalen Potenzreihe von $U(\xi)$. Diese definiert demnach eine analytische Funktion U , die wir in Differentialgleichung (5.2.9) einsetzen können. Aufgrund der Cauchyschen Rekursionsformeln stimmen Reihenkoeffizienten links und rechts überein, denn $U(0) = 0$. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für analytische Funktionen wird die Differentialgleichung in der Umgebung von 0 erfüllt; $U(\xi)$ ist analytische Lösung von (5.2.9) und hat überdies nur positive Koeffizienten.
2. $G(x, y) = U\left(\frac{\varrho x}{6M} + y\right)$ ist analytische Majorante zur formalen Potenzreihe von Z . Folglich definiert Z in einer Umgebung des Nullpunktes eine analytische Funktion und diese löst (5.2.1).
3. Z ist Majorante zu u, v, w . Es gibt also eine Umgebung der Null, in welcher u, v, w analytisch sind und demnach eine Lösung von (5.1.2), (5.1.3) definieren. Der Cauchysche Algorithmus legt ihre Koeffizienten eindeutig fest. Diese analytische Lösung muß deshalb die einzige analytische Lösung sein.

Damit ist Satz 5.2.1 von Cauchy–Kowalewskaya vollständig bewiesen. \square

Wir formulieren nun den Satz von Cauchy–Kowalewskaya in der allgemeinsten Gestalt.

5.2.3 Satz: In dem Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^{r_k} u^k}{(\partial x^1)^{r_k}} = f^k \left(x, u, \frac{\partial^\ell u}{(\partial x^\ell)^{\ell_1} \dots (\partial x_n)^{\ell_n}} \right) \quad \text{mit } k = 1, \dots, m; \quad (5.2.12)$$

mit $\ell = \ell_1 + \dots + \ell_n \leq r_k$ und $\ell_1 < r_k$ für die Vektorwertige Funktion $u = (u^1, \dots, u^m)$ von den unabhängigen Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit den Anfangsbedingungen

$$\left\{ \begin{array}{l} u^k |_{x_1=0} = \varphi_0^k(x^2, \dots, x^n), \\ \frac{\partial u^k}{\partial x_1} |_{x_1=0} = \varphi_1^k(x^2, \dots, x^n), \\ \vdots \\ \frac{\partial^{r_k-1} u^k}{(\partial x_1)^{r_k-1}} |_{x_1=0} = \varphi_{r_k-1}^k(x^2, \dots, x^n), \quad k = 1, \dots, m, \end{array} \right. \quad (5.2.13)$$

seien alle vorgegebenen Funktionen analytisch in einer Umgebung des Ursprungs $x = 0$ und der Anfangsvorgaben in $x = 0$. Dann existiert in einer geeigneten Umgebung von 0 genau eine analytische Lösung u .

5.3 Zur Tragweite des Satzes von Cauchy–Kowalewskaya

Auf den ersten Blick vermutet man, daß mit Hilfe des Satzes von Cauchy–Kowalewskaya und durch Approximation von Differentialgleichung und Anfangsbedingungen mit analytischen Funktionen alle partiellen Differentialgleichungen mit Cauchyschen Anfangsvorgaben vernünftig gelöst werden können. Dies ist leider nicht so, wie die folgenden Beispiele zeigen.

5.3.1 Das Cauchy–Problem für die Laplace–Gleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \text{und } u_y(x, 0) = \frac{1}{n} \sin nx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.3.1)$$

Schreiben wir die Laplace–Gleichung als

$$u_{yy} = -u_{xx} \quad (5.3.2)$$

so hat (5.3.1), (5.3.2) die Form (5.2.12), (5.2.12). Also gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ jeweils genau eine analytische Lösung. Diese bestimmen wir mit dem Produktansatz und erhalten

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \cdot \sinh(ny). \quad (5.3.3)$$

Es gilt also

$$u_{ny}(x,0) = \frac{1}{n} \sin nx \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ gleichmäßig,}$$

aber $u_n(x,y) \rightarrow \infty$ für jedes $y > 0$.

Die Lösung hängt von den Anfangsdaten also nicht stetig ab, d.h. das Anfangswertproblem (5.3.1) ist **nicht korrekt gestellt**, obwohl der Satz von Cauchy-Kowalewskaya angewendet werden kann. Es gilt sogar ganz allgemein: Für elliptische Differentialgleichungen ist das Cauchysche Anfangswertproblem nicht korrekt gestellt.

5.3.2 Das O. Perronsche Beispiel [61] 3.2

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_x &= u_y + v_y & , & \quad u(0,y) = 0 & , \\ v_x &= au_y + v_y + f(x+y) & , & \quad v(0,y) = 0 & , \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

ist hyperbolisch für $a > 0$, parabolisch für $a = 0$ und elliptisch für $a < 0$. Es hat stetig differenzierbare Lösungen u, v in einer Umgebung der Geraden $x = 0$ dann und nur dann, wenn

$$\begin{aligned} \text{für } a > 0 & \quad f \text{ stetig ist,} \\ \text{für } a = 0 & \quad f \text{ zweimal stetig differenzierbar ist und} \\ \text{für } a < 0 & \quad f \text{ reell analytisch ist.} \end{aligned}$$

Aufgabe 37:

Man beweise die Behauptungen des O. Perronschen Beispiels.

5.3.3 Das Beispiel von Hans Lewy (nach [116] I, §B)

Sei $U(x,y,t)$ in einer Umgebung des Ursprungs stetig differenzierbare Lösung von

$$u_x + iu_y - 2i(x+iy)u_t = f(t) \quad (5.3.5)$$

mit stetiger reellwertiger Funktion $f(t)$. Dann muß $f(t)$ bei $t = 0$ analytisch sein.

Um dies zu zeigen, führen wir in der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq R$ die komplexe Variable $z = x + iy = re^{i\varphi}$ ein und definieren $s = r^2$. Des weiteren definieren wir die Funktion

$$V(t,r) := \int_{|z|=r} u dz.$$

Dann ergeben sich

$$V(t,r) = \int_{|z|\leq r} \int (u_x + iu_y) dx dy = i \int_0^r \int_0^{2\pi} (u_x + iu_y) \rho d\rho d\varphi$$

und Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= i \int_{|z|=r}^0 (u_x + iu_y) + d\varphi = r \int_{|z|=r} (u_x + iu_y) \frac{dz}{z} \\ \frac{\partial V}{\partial s} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial V}{\partial r} = \int_{|z|=r} (u_x + iu_y) \frac{dz}{z} = i \int_{|z|=r} \left\{ u_t + f(t) \frac{1}{2z} \right\} dz \\ &= i \frac{\partial V}{\partial t} + i\pi f(t). \end{aligned}$$

Die komplexe Funktion

$$U(t,s) := V(t,\sqrt{s}) + \pi \int_0^t f(\tau) d\tau$$

erfüllt demnach die Differentialgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial s} = i \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{für } 0 < s < R^2 \quad \text{und } |t| \leq c,$$

das heißt, Real- und Imaginärteile von $U = U_1 + iU_2$ genügen dort den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} U_{1s} + U_{2t} &= 0, \\ U_{2s} - U_{1t} &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $U = U(s - it)$ dort holomorph. Insbesondere ist U stetig bis $s = 0$ und $U(t,0) = \pi f(t)$ reell. Dann ist die Fortsetzung $U(t + is) = \overline{U(t - is)}$ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip holomorph. Folglich ist U analytisch, und deshalb ist auch $f(t)$ analytisch.

Man kann also die Differentialgleichung (5.3.5) $f \in C^\infty$ noch nicht einmal approximieren, denn für nicht analytische $f(t)$ hat (5.3.5) **überhaupt keine Lösung!**

In [116] wird eine nirgends analytische aber unendlich oft differenzierbare Funktion f konstruiert. Mit dieser Funktion f hat also (5.3.5) überhaupt keine Lösung.

6 Elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung, das Maximumprinzip [58, 61]

Wir betrachten nun Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Unabhängigen. Lineare Gleichungen haben hier die Gestalt

$$(a(x,y)u_x + b(x,y)u_y)_x + (bu_x + cu_y)_y + Pu_x + Qu_y + Ru + S = 0 \quad (6.0.1)$$

Die Typeneinteilung wird für den Hauptteil vorgenommen. (6.0.1) heißt im Punkt (x,y)

$$\begin{cases} \text{elliptisch für} & (ac - b^2)(x,y) > 0, \\ \text{parabolisch für} & (ac - b^2)(x,y) = 0, \\ \text{hyperbolisch für} & (ac - b^2)(x,y) < 0. \end{cases} \quad (6.0.2)$$

Diese Definition ist in Übereinstimmung mit unserer Definition in Kapitel 3, wenn wir sie auf das zu (6.0.1) gehörende System erster Ordnung für

$$\begin{aligned} u_1 &= u_x, u_2 = u_y \\ u_{1y} - u_{2x} &= 0, (au_1 + bu_2)_x + (bu_1 + cu_2)_y = f \end{aligned} \quad (6.0.3)$$

anwenden.

6.1 Maximumprinzip und Hopfsche Lemmata

Wir betrachten zunächst (6.0.1) vom **elliptischen** Typ mit Koeffizienten $a,b,c \in C^1$ und $P,Q,R,S \in C^0$.

6.1.1 Satz: Sei \mathcal{G} Gebiet und (6.0.1) elliptisch in \mathcal{G} . Seien $a > 0, R \leq 0$ und

$$S < 0 \text{ in } \mathcal{G}, (S > 0 \text{ in } \mathcal{G}), \quad (6.1.1)$$

und sei $u \in C^2(\mathcal{G})$ Lösung von (6.0.1). Dann hat u kein Maximum ≥ 0 (kein Minimum ≤ 0) in \mathcal{G} .

Beweis: Annahme: Es gilt $u(x_0, y_0) = \max u \geq 0, (x_0, y_0) \in \mathcal{G}$. Das Gebiet \mathcal{G} ist offen, also ist (x_0, y_0) auch lokales Maximum und

$$\nabla u(x_0, y_0) = \vec{0}.$$

Dann folgt aus der Differentialgleichung im Punkt (x_0, y_0)

$$(au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy})|_{(x_0, y_0)} = -Ru - S > 0.$$

Um diese Ungleichung als quadratischen Ausdruck zu schreiben, transformieren wir

$$\begin{aligned}\xi &= x, \eta = -b(x_0, y_0)x + a(x_0, y_0)y, \\ u_x &= u_\xi - bu_\eta, u_y = au_\eta, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + b^2u_{\eta\eta}, u_{xy} = au_{\xi\eta} - abu_{\eta\eta}, u_{yy} = a^2u_{\eta\eta},\end{aligned}$$

und die Ungleichung geht über in

$$a(u_{\xi\xi} + (ac - b^2)u_{\eta\eta})|_{(x_0, y_0)} > 0.$$

Andererseits hat u in (x_0, y_0) ein lokales Maximum, deshalb gilt neben $\nabla u(x_0, y_0) = \vec{0}$ auch noch

$$u_{\xi\xi} \leq 0 \text{ und } u_{\eta\eta} \leq 0$$

im Widerspruch zu obiger Ungleichung mit $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$. Also kann u in \mathcal{G} kein Maximum annehmen. \square

Mit Hilfe von Satz 6.1.1 kann man im Folgenden zwei Lemmata von E. Hopf zeigen.

6.1.2 Erstes Hopfsches Lemma: Seien $ac - b^2 > 0$, $a > 0$, $R \leq 0$ in \mathcal{G} erfüllt. $u \in C^2(\mathcal{G})$ sei Lösung von (6.0.1), $S \leq 0$, und u nehme in \mathcal{G} ein positives Maximum > 0 an. Dann ist u konstant in \mathcal{G} . (Entsprechend ist u konstant, wenn $S \geq 0$ und u ein negatives Minimum in \mathcal{G} annimmt.)

Beweis: Wir nehmen an, dass u nicht konstant und $M = u(x_0, y_0) > 0$ das Maximum mit $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}$ sei. Dann existiert $(x_1, y_1) \in \mathcal{G}$ und mit $u(x_1, y_1) < M$ eine abgeschlossene Kreisscheibe $K_{r_0} = \{(x, y) \mid |(x, y) - (x_1, y_1)| \leq r_0\}$ mit $r_0 > 0$ und $u(x, y) < M$ für alle $(x, y) \in K_{r_0}$. Des weiteren existiert ein Weg von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1) , so dass K_{r_0} entlang dieses Weges mit Mittelpunkten auf dem Weg ganz in \mathcal{G} verschoben werden kann. Nun verschieben wir K_{r_0} von (x_1, y_1) in Richtung (x_0, y_0) so lange, bis das erste Mal ein Punkt (ξ, η) auf dem Kreisrand liegt mit $u(\xi, \eta) = M$. Dann gelten $u(\xi, \eta) = M$ sowie $u(x, y) < M$ für alle Punkte $(x, y) \in \overset{\circ}{K}_{r_0}$, d.h. im Innern der Kreisscheibe K_{r_0} .

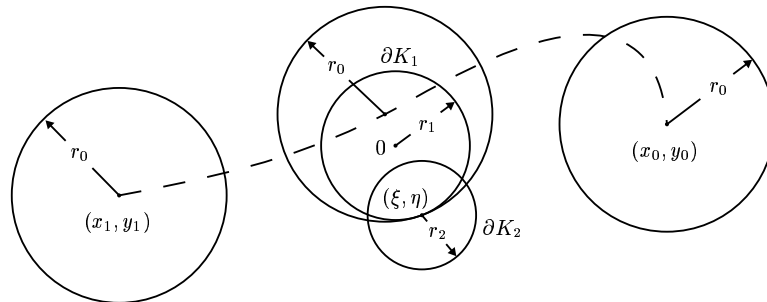


Bild 47: Geometrische Konstruktion

Durch (ξ, η) legen wir einen Kreis ∂K_1 vom Radius $r_1 < r_0$, der ∂K_0 tangiert und in K_{r_0} liegt. Im folgenden sei oBdA der Mittelpunkt von K_1 der Ursprung unseres Koordinatensystems. Um (ξ, η) legen wir noch einen dritten Kreis ∂K_2 vom Radius $r_2 < r_1$ derart, dass $u(x, y) \geq 0$ in $\overline{K}_2 \subset \mathcal{G}$ gilt. Dies ist wegen $u(\xi, \eta) = M > 0$ und der Stetigkeit von u immer möglich,

Nach Konstruktion haben wir also:

$$u < M \text{ auf } \overline{K_1} \setminus \{(\xi, \eta)\} \text{ und } u(\xi, \eta) = M > 0.$$

Wegen der Stetigkeit von u gibt es demnach eine Konstante $m > 0$, so dass

$$u|_{\partial K_2 \cap \overline{K_1}} \leq M - m$$

erfüllt ist. E. Hopf definierte die folgende Hilfsfunktion:

$$h(x, y) := e^{-\alpha(x^2+y^2)} - e^{-\alpha r_1^2}$$

mit einem später zu wählenden Parameter $\alpha > 0$. Dann gilt

$$h|_{\partial K_2 \cap \overline{K_1}} > 0$$

und mit den Ableitungen

$$h_x = -2\alpha x e^{-\alpha(x^2+y^2)}, \quad h_y = -2\alpha y e^{-\alpha(x^2+y^2)}$$

schließlich

$$\begin{aligned} (ah_x + bh_y)_x + (bh_x + ch_y)_y &= 4\alpha^2(ax^2 + 2bxy + cy^2)e^{-\alpha(x^2+y^2)} \\ &\quad - 2\alpha e^{-\alpha(x^2+y^2)}(a + c + x(a_x + b_y) + y(b_x + c_y)). \end{aligned}$$

Wegen $x^2 + y^2 > 0$ in $\overline{K_2}$ gibt es eine Konstante $c_0 > 0$, so dass wegen $ac - b^2 > 0$ die Ungleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \geq c_0 > 0 \text{ für alle } (x, y) \in \overline{K_2}$$

erfüllt ist. Außerdem wächst der erste Summand mit der Ordnung α^2 , der zweite nur mit der Ordnung α . Wenn wir also $\alpha > 0$ genügend groß wählen, erhalten wir mit $R \leq 0$ schließlich

$$\begin{aligned} Lh &:= (ah_x + bh_y) + (bh_x + ch_y) + Ph_x + Qh_y + Rh \\ &= 4\alpha^2(ax^2 + 2bxy + cy^2)e^{-\alpha(x^2+y^2)} \\ &\quad - 2\alpha e^{-\alpha(x^2+y^2)}(a + c + x(P + a_x + b_y) + y(Q + b_x + c_y)) + Re^{-\alpha(x^2+y^2)} - Re^{-\alpha r_1^2} \\ &\geq c_1 > 0 \text{ in } \overline{K_2}. \end{aligned}$$

Außerdem haben wir

$$h|_{\partial K_1} = 0, \quad 0 \leq h|_{\overline{K_1}} \leq e^{-\alpha(x^2+y^2)} \leq 1 \quad \text{und} \quad h|_{\overline{K_2} \setminus \overline{K_1}} < 0.$$

Nun wählen wir zu u die Funktion

$$v := u + \delta \cdot h \text{ mit } 0 < \delta \leq \frac{m}{2}.$$

Dann gelten $v(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) = M$ und

$$\begin{aligned} v|_{\partial K_2 \cap \overline{K_1}} &\leq M - m + \frac{m}{2} \cdot 1 = M - \frac{m}{2} < M, \\ v|_{\partial K_2 \setminus \overline{K_1}} &< u|_{\partial K_2 \setminus \overline{K_1}} \leq M. \end{aligned}$$

Also ist

$$v|_{\partial K_2} < M,$$

erfüllt und v hat demnach in $\overset{\circ}{K}_2$ ein **positives Maximum**. Außerdem gilt in \overline{K}_2

$$Lv + \tilde{S} := Lv + (S - \delta Lh) = Lu + S + \delta Lh - \delta Lh = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{S} < S \leq 0.$$

Wir können also Satz 6.1.1 anwenden, der ein positives Maximum von v in $\overset{\circ}{K}_2$ ausschließt. Dies ist ein Widerspruch, das heißt, u muss konstant sein.

Im Fall $S > 0$ betrachte man statt u die Funktion $(-u)$. □

6.1.3 Korollar: *Ist $R \equiv 0$, so muß u konstant sein, falls u in \mathcal{G} ein Maximum oder Minimum hat.*

Beweis: Betrachte dazu $w := u + \mu$ mit $\mu > \text{Max } u$ bzw. $\mu < \text{Min } u$. Dann erfüllt w wegen $R \equiv 0$ ebenfalls (6.0.1), und Anwendung des ersten Hopfschen Lemmas 6.1.2 liefert die Behauptung. □

6.1.4 Satz: *Sei $u \in C^2(\mathcal{G}) \cap C^0(\overline{\mathcal{G}})$ Lösung von (6.0.1) in \mathcal{G} mit $S \equiv 0$, $ac - b^2 > 0$ und $a > 0$, $R \leq 0$ in \mathcal{G} . Dann gilt für alle $(x, y) \in \overline{\mathcal{G}}$*

$$|u(x, y)| \leq \text{Max}_{\partial \mathcal{G}} |u|. \quad (6.1.2)$$

Das bedeutet, dass das Dirichlet–Problem (6.0.1)

$$u|_{\partial \mathcal{G}} = \varphi \in C^0(\partial \mathcal{G}) \quad (6.1.3)$$

korrekt im Sinne von $\varphi \in C^0(\partial \mathcal{G}) \mapsto u \in C^0(\overline{\mathcal{G}})$ gestellt ist, wenn man nur die Lösbarkeit zeigen kann.

Beweis: Sei $\varphi(s_0) = \text{Max}_{\partial \mathcal{G}} \varphi(s)$. Dann ist entweder $u(x, y) < \varphi(s_0)$ in \mathcal{G} oder $u \equiv \varphi(s_0)$ nach dem ersten Hopfschen Lemma 6.1.2, falls $\varphi(s_0) > 0$. Ist hingegen $\varphi(s_0) \leq 0$, so kann u nach dem ersten Hopfschen Lemma kein positives Maximum in \mathcal{G} haben, da sonst $0 < u_{\text{Max}} \equiv u$ in $\overline{\mathcal{G}}$ im Gegensatz zu $u(x_0, y_0) = \varphi(s_0) \leq 0$ gelten würde. Zusammen bedeutet das

$$u(x, y) \leq \text{Max}_{\partial \mathcal{G}} \{0, \varphi\}.$$

Entsprechend finden wir

$$-u(x, y) \leq \text{Max}_{\partial \mathcal{G}} \{0, -\varphi\}.$$

und beides zusammen ergibt

$$|u(x, y)| \leq \text{Max}_{\partial \mathcal{G}} |\varphi|$$

die behauptete Ungleichung (6.1.2). □

6.1.5 Satz: \mathcal{G} sei beschränkt und $u \in C^2(\mathcal{G}) \cap C^0(\overline{\mathcal{G}})$ sei Lösung von (6.0.1) in \mathcal{G} und $u|_{\partial\mathcal{G}} = \varphi$. Seien $ac - b^2 > 0$ sowie $a > 0$ und $R \leq 0$ in $\overline{\mathcal{G}}$ erfüllt. Wir setzen

$$K := \text{Max}_{\overline{\mathcal{G}}} \{|a|, |b|, |c|, |a_x|, |b_x|, |c_x|, |a_y|, |b_y|, |c_y|, |P|, |Q|, |R|\}, \quad m := \text{Min}_{\overline{\mathcal{G}}} \frac{ac - b^2}{a + c}.$$

Dann gibt es eine Konstante $M = M(K, m, \mathcal{G})$, so dass gilt

$$|u(x, y)| \leq \text{Max}_{\partial\mathcal{G}} |\varphi| + M \text{Max}_{\overline{\mathcal{G}}} |S|. \quad (6.1.4)$$

Aufgabe 38: Man beweise Satz 6.1.5. Dazu führe man die Hilfsfunktion

$$w := c + C(e^{\alpha\xi} - e^{\alpha x})$$

mit $c = \text{Max}_{\partial\mathcal{G}} |\varphi|$, $C = \text{Max}_{\overline{\mathcal{G}}} |S|$, $\xi = \text{Max}_{\overline{\mathcal{G}}} x$ und geeigneter Konstanten $\alpha > 0$ ein und verwende das erste Hopfsche Lemma 6.1.2 für $U := u - w$.

Die allgemeine im Allgemeinen nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad (6.1.5)$$

mit $F \in C^1$ heißt **absolut elliptisch** in $\mathcal{G} \times \mathbb{R}^6$, falls es eine stetige Funktion $d(x, y)$ derart gibt, dass für alle $(x, y, u, p, q, r, s, t) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}^6$ gilt

$$F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2 \geq d(x, y) > 0. \quad (6.1.6)$$

6.1.6 Satz: $u_1, u_2 \in C^2(\mathcal{G}) \cap C^0(\overline{\mathcal{G}})$ mit

$$u_1|_{\partial\mathcal{G}} = u_2|_{\partial\mathcal{G}} \quad (6.1.7)$$

seien Lösungen derselben absolut elliptischen Differentialgleichung in \mathcal{G} mit

$$F_r > 0 \quad \text{und} \quad F_u \leq 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{G} \times \mathbb{R}^6. \quad (6.1.8)$$

Dann gilt $u_1 \equiv u_2$ in $\overline{\mathcal{G}}$.

Aufgabe 39: Man beweise Satz 6.1.6.

6.1.7 Das zweite Hopfsche Lemma:

$u \in C^2(\mathcal{G}) \cap C^1(\overline{\mathcal{G}})$ sei Lösung von (6.0.1) mit $ac - b^2 > 0$, $a > 0$, $R \leq 0$, $S \leq 0$ in \mathcal{G} . In einem Randpunkt $(x_0, y_0) \in \partial\mathcal{G}$ gelte $\text{Max}_{\partial\mathcal{G}} u = u(x_0, y_0) > 0$ und $\partial\mathcal{G}$ sei in der Umgebung von (x_0, y_0) in C^2 und in (x_0, y_0) nicht charakteristisch, d.h. in (x_0, y_0) muß gelten

$$\dot{y}_0 : \dot{x}_0 \neq (c + b) : (a + b), \quad (6.1.9)$$

falls (x_0, y_0) parabolischer Punkt ist. Dann ist entweder

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(x_0, y_0)} > 0 \quad (6.1.10)$$

oder $u \equiv u(x_0, y_0)$ ist konstant in $\overline{\mathcal{G}}$. Hierbei ist n die äußere Normale an $\partial\mathcal{G}$.

Aufgabe 40: Man beweise das zweite Hopfsche Lemma.

6.2 Finite Differenzen und das diskrete Maximumprinzip

Die Überlegungen zum Maximum-Prinzip, insbesondere zu Satz 6.1.5 lassen sich auch auf die diskreten Analoga zu **elliptischen Differentialgleichungen**, nämlich elliptische Differenzengleichungen übertragen. Dies wollen wir nach [11] im Folgenden skizzieren.

Definition: Eine $N \times N$ Matrix $M = ((m_{ij}))$ heißt vom **positiven Typ**, wenn es eine Indexmenge $\mathcal{J}(M)$ gibt und die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$m_{ij} \leq 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad (6.2.1)$$

$$\sum_{k=1}^N m_{ik} \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N, \quad (6.2.2)$$

$$\sum_{k=1}^N m_{ik} > 0 \quad \text{für } i \in \mathcal{J}(M) \subset \{1, 2, \dots, N\}, \quad (6.2.3)$$

für $i \notin \mathcal{J}(M)$ existiert eine Kette von Elementen $m_{ik_1}, m_{k_1 k_2}, \dots, m_{k_r j}$ ungleich Null mit $j \in \mathcal{J}(M)$. Eine solche Kette nennen wir eine **diskrete Verbindung** von i nach $\mathcal{J}(M)$.

6.2.1 Lemma: Wenn M eine Matrix vom positiven Typ ist, dann ist M regulär und die Inverse von M hat nur nichtnegative Elemente. Die Ungleichungen

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} x_j \geq 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, N \quad (6.2.4)$$

haben

$$x_j \geq 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, N \quad (6.2.5)$$

zur Folge.

Matrizen mit diesen Eigenschaften nennt man häufig auch **M-Matrizen**.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß (6.2.5) aus (6.2.4) unter o.g. Voraussetzungen folgt.

Als erstes überzeugen wir uns von $m_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, N$. Denn falls $m_{ii} = 0$ gelten würde, folgte aus (6.2.2) und (6.2.1)

$$0 \leq \sum_{k=1}^n m_{ik} = \sum_{k \neq i}^N m_{ik} \leq 0,$$

somit $m_{ik} = 0$ für alle k . Also würde $i \notin \mathcal{J}(M)$ gelten, aber es würde kein $m_{ik} \neq 0$ gelten im Widerspruch zur diskreten Verbindungseigenschaft.

Für jedes $i = 1, \dots, N$ gilt demnach

$$\sum_{j \neq i} \left| \frac{m_{ij}}{m_{ii}} \right| x_j = -\frac{1}{m_{ii}} \sum_{j \neq i} m_{ij} x_j \leq x_i, \quad \text{und} \quad -\frac{1}{m_{ii}} \sum_{j \neq i} m_{ij} \begin{cases} < 1 & \text{für } j \in \mathcal{J}(M), \\ = 1 & \text{für } j \notin \mathcal{J}(M). \end{cases}$$

Im Widerspruch zu (6.2.1) nehmen wir jetzt an, es gelte $\underline{x} = x_i = \min\{x_j\} < 0$.

Für diesen Index i sind dann zwei Fälle möglich.

1. $i \in \mathcal{J}(\mathbf{M})$. Dann folgt mit (6.1.9) der Widerspruch

$$x_i = \underline{x} < \frac{1}{m_{ii}} \sum_{j \neq i} |m_{ij}| \underline{x} \leq -\frac{1}{m_{ii}} \sum_{j \neq i} m_{ij} x_j \leq x_i = \underline{x}.$$

2. $i \notin \mathcal{J}(\mathbf{B})$. Dann gibt es einen Index k_1 mit $m_{ik_1} \neq 0$.

Falls $\underline{x} < x_{k_1}$ gilt, erhalten wir wieder einen Widerspruch

$$\underline{x} = x_i = \frac{1}{m_{ii}} \sum_{j \neq i} |m_{ij}| \underline{x} < -\frac{1}{m_{ii}} \sum_{j \neq i} m_{ij} x_j \leq x_i = \underline{x}.$$

Also gilt $\underline{x} = x_{k_1}$, und wir können $i = k_1$ wählen.

Mit der gleichen Argumentation wie oben können wir dann in der Kette sukzessive $i = k_2$ wählen. Nach endlich vielen Schritten erreichen wir

$i \in \mathcal{J}(\mathbf{M})$, und das kann nicht sein.

Also gilt $x_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, N$.

Falls $\mathbf{M}\vec{y} = \vec{0}$ gilt, folgt $y_i \geq 0$ und $-y_i \geq 0$, also $\vec{y} = \vec{0}$. Der Alternativsatz der linearen Algebra liefert deshalb, dass $\det \mathbf{M} \neq 0$ erfüllt ist. Die inverse Matrix $\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1}$ existiert also und erfüllt die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} h_{jk} = \delta_{ik} \geq 0.$$

Mit der eben gezeigten Ungleichung (6.2.1) ergibt sich $h_{jk} \geq 0$. Damit sind alle Behauptungen von Lemma 6.2.1 gezeigt. \square

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die **Differenzenapproximation der Laplace-Gleichung**

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \mathcal{G}, \\ u|_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma = \partial\mathcal{G}, \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

wobei $\partial\mathcal{G}$ der Einfachheit halber ein Rechteck sei.

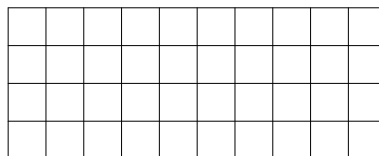


Bild 48: Quadratisches Differenzengitter

Der zentrale Fünfpunkte Differenzenoperator Δ_h für Δ lautet

$$\Delta_h u := \frac{1}{4h^2} \{u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y)\} . \quad (6.2.7)$$

Wir ersetzen (6.2.6) durch die diskreten Gleichungen

$$-h^2 \Delta_h u_h = \sum_{j=1}^N m_{ij} u_{hj} = h^2 f_i \quad \text{für } i = 1, \dots, N, \quad (6.2.8)$$

wobei wir uns die inneren Punkte durchnummeriert denken. Aus der Definition (6.2.7) entnehmen wir für (6.2.8)

$$m_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{array} \quad \text{oder} \right\} \leq 0 \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N m_{ij} = 0$$

für diejenigen Indizes i_r , bei denen kein Punkt des Differenzensterns auf dem Rand liegt. Liegen $r \geq 1$ Punkte auf dem Rand, so gilt

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} = 1 - \frac{1}{4}(4-r) \geq \frac{1}{4} > 0.$$

M in (6.2.8) ist also vom **positiven Typ**.

6.2.2 Satz: Aus

$$|\Delta_h v_h| \leq \beta; \quad v_h|_{\Gamma_h} = 0$$

folgt

$$|v_h| \leq \beta c$$

mit einer von v_h, h und β unabhängigen Konstanten c .

Beweis: Wir wählen eine Hilfsfunktion $\varphi \in C^4$ mit $\varphi|_{\Gamma} = 0$, so dass in $\bar{\mathcal{G}}$ gilt

$$\Delta \varphi \leq -2 \quad .$$

Aufgrund des Mittelwertsatzes haben wir

$$|\Delta \varphi - \Delta_h \varphi| \leq ch^2$$

und demnach für genügend kleines $h_0 > 0$ und alle $0 < h \leq h_0$ die Ungleichung

$$\Delta_h \varphi \leq -1 \quad (6.2.9)$$

Folglich gelten die beiden Abschätzungen

$$-\Delta_h(v_h + \beta\varphi) \geq -\beta + \beta = 0 \quad \text{und} \quad -\Delta_h(-v_h + \beta\varphi) \geq -\beta + \beta = 0,$$

aus denen sich mit Lemma 6.2.1 sowohl $0 \leq v_h + \beta\varphi$ als auch $0 \leq -v_h + \beta\varphi$ auf dem Gitter ergeben.

Damit folgt

$$|v_h| \leq \beta\varphi \leq c\beta,$$

wie behauptet. □

Die Existenz der Hilfsfunktion φ ist für ein Rechteck nicht-trivial.

6.2.3 Satz: Sei $u \in C^4(\overline{\mathcal{G}})$. Dann gilt für die Lösung u_h der Differenzgleichungen die Fehlerabschätzung

$$|u_h - u| = O(h^2).$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Delta_h u - \Delta u| \leq ch^2$$

und mit $\Delta_h u_h|_i = \Delta u|_i$:

$$\begin{aligned} |\Delta_h u_h - \Delta_h u| &\leq ch^2 \\ |u_h - u| &\leq ch^2. \end{aligned}$$

Also liefert Satz 6.2.2 die behauptete Abschätzung. □

Bemerkung: Für ein Gebiet mit Ecken ist $u \in C^4(\overline{\mathcal{G}})$ eine unvernünftige Forderung, da sie i.a. nicht erfüllt werden kann.

Für ein Gebiet mit glatter Randkurve $\partial\mathcal{G}$ muß man hingegen Differenzenschema und Beweis ändern. Siehe dazu [126] §7.

Aufgabe 41: Auf dem achsenparallelen Quadrat \mathcal{G} wird das gleichmäßig elliptische¹ Randwertproblem mit stetigen Koeffizienten $a, c > 0$

$$\begin{aligned} a(x,y)u_{xx} + c(x,y)u_{yy} + Pu_x + Qu_y &= 0, \\ u|_{\Gamma} &= \varphi \end{aligned}$$

durch das Differenzenschema

$$\begin{aligned} -a(x,y)\frac{1}{h^2}(u_h(x+h,y) + u_h(x-h,y) - 2u_h(x,y)) \\ -c(x,y)\frac{1}{h^2}(u_h(x,y+h) + u_h(x,y-h) - 2u_h(x,y)) \\ -P(x,y)\frac{1}{2h}(u_h(x+h,y) - u_h(x-h,y)) \\ -Q(x,y)\frac{1}{2h}(u_h(x,y+h) - u_h(x,y-h)) &= 0, \\ u_h|_{\partial\mathcal{G}} &= \varphi \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

in den Gitterpunkten quadratischer Differenzengitter der Maschenweiten h approximiert.

a) Zeige, daß die durch (6.2.10) definierten linearen Gleichungen auf dem Differenzengitter eine Koeffizientenmatrix vom positiven Typ haben, vorausgesetzt $0 < h \leq h_0$ mit einem geeigneten $h_0 > 0$, das nur von den Koeffizientenfunktionen a, c, P, Q abhängt.

¹ Eine elliptische Differentialgleichung der obigen Gestalt heißt gleichmäßig elliptisch, falls es eine positive Konstante γ gibt, mit der $ac \geq \gamma$ gilt.

b) man zeige für die diskrete Lösung u_h das diskrete Maximumprinzip:

$$\text{Min } \varphi|_{\partial\mathcal{G} \cap \text{Gitter}} \leq u_h \leq \text{Max } \varphi|_{\partial\mathcal{G} \cap \text{Gitter}}$$

für alle $0 < h \leq h_0$ mit h_0 aus a).

Aufgabe 42: Man gebe ein Verfahren zur Berechnung einer Koordinatentransformation

$$\xi = x \quad , \quad \zeta = \Psi(x,y)$$

an, so dass die gleichmäßig elliptische lineare Differentialgleichung²

$$(au_x + bu_y)_x + (bu_x + cu_y)_y + Pu_x + Qu_y + Ru = f \quad (6.2.11)$$

übergeht in

$$Au_{\xi\xi} + Cu_{\zeta\zeta} + pu_{\xi} + qu_{\zeta} + ru = f.$$

² Die elliptische Gleichung heißt gleichmäßig elliptisch, falls es eine positive Konstante γ gibt, so dass $ac - b^2 \geq \gamma > 0$ für alle $(x,y) \in G$ gilt.

7 Übungsaufgaben mit Lösungsvorschlägen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (6 Punkte) Bestimmen Sie allgemeine Lösungen $u = u(x, t)$ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{a) } \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \text{b) } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y, \quad \text{c) } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 Mit $u = u(\mathbf{x}, t)$ bezeichnen wir die Funktion $u = u(x, y, t)$.

a) $u(x, y, t) = x + C(y, t)$

(C ist eine beliebige Funktion von y und t).

b) Einmalige Integration liefert

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \xi y^2 + C_1(x, t),$$

nochmalige Integration

$$u(x, y, t) = y^3 + C_1(x, t) y + C_2(x, t)$$

mit beliebigen Funktionen C_1 und C_2 .

c) Einmalige Integration nach y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \tilde{C}_1(x, t);$$

nochmalige Integration nach x :

$$u(x, y, t) = xy + \int_0^x \tilde{C}_1(\xi, t) d\xi + C_2(y, t).$$

Mit $C_1 := \int_0^x \tilde{C}_1(\xi, t) d\xi$ erhalten wir die Lösung

$$u(x, y, t) = xy + C_1(x, t) + C_2(y, t),$$

wobei die Funktionen C_1 und C_2 stetig nach x bzw. y differenzierbar sein müssen.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Mit Hilfe der Koordinatentransformation $\xi_1 = x - at$, $\xi_2 = x + at$ bestimme man Lösungen $u = u(t, x)$ der im Raum eindimensionalen Wellengleichung

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 Die Koordinatentransformation liefert

$$t = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2a} \quad \text{und} \quad x = \frac{\xi_2 + \xi_1}{2a}.$$

Damit erfüllt

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) := u\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{2a}, \frac{\xi_2 + \xi_1}{2a}\right)$$

die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0. \quad (*)$$

Es gilt nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = -a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_1} + a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_2}$$

etc., und somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -a \left(-a \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_1^2} + a \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) + a \left(-a \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_2^2} \right) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_1^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_2^2} \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_2^2}$$

und daher

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}.$$

Aus der eindimensionalen Wellengleichung folgt daher die Gleichung (*). Einmalige Integration liefert

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_2} = f_2(\xi_2),$$

nochmalige Integration (bezüglich ξ_2)

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \underbrace{\int_0^{\xi_2} f_2(s) ds}_{=: F_1(\xi_2)} + f_1(\xi_1).$$

Das Ergebnis muß mit demjenigen übereinstimmen, welches man durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält. Daher lautet die allgemeine Lösung

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = F_1(\xi_1) + F_2(\xi_2), \quad F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}),$$

beziehungsweise für x und t

$$u(t, x) = F_1(x - at) + F_2(x + at), \quad F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) Transformieren Sie die dreidimensionale Laplace-Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

in Kugelkoordinaten.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 Die Kugelkoordinaten lauten

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \theta, \\y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}r(x,y,z) &:= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \varphi(x,y,z) &:= \arctan(y/x), \\ \theta(x,y,z) &:= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} r_x + \frac{\partial u}{\partial \theta} \theta_x + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \varphi_x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} r_y + \frac{\partial u}{\partial \theta} \theta_y + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \varphi_y, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial r} r_z + \frac{\partial u}{\partial \theta} \theta_z + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \varphi_z, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} r_x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \theta_x r_x + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \varphi_x r_x + \frac{\partial u}{\partial r} r_{xx} \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \theta_x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \theta_x r_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} \varphi_x \theta_x + \frac{\partial u}{\partial \theta} \theta_{xx} \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \varphi_x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \varphi_x r_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} \varphi_x \theta_x + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \varphi_{xx} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} r_x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \theta_x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \varphi_x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} r_x \varphi_x + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} r_x \theta_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} \theta_x \varphi_x \right) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial r} r_{xx} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \theta_{xx} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \varphi_{xx}.\end{aligned}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ folgen, wenn man x durch y bzw. z ersetzt.

Es folgt dann

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} (\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} (r_x \varphi_x + r_y \varphi_y + r_z \varphi_z) + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} (r_x \theta_x + r_y \theta_y + r_z \theta_z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} (\theta_x \varphi_x + \theta_y \varphi_y + \theta_z \varphi_z) \right) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial r} (r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}) + \frac{\partial u}{\partial \theta} (\theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}) + \frac{\partial u}{\partial \varphi} (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}).\end{aligned}$$

Hier lauten die benötigten Ableitungen von r , θ und ϕ wie folgt:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & r_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & r_z &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \varphi_x &= -\frac{y}{x^2 + y^2}, & \varphi_y &= \frac{x}{x^2 + y^2}, & \varphi_z &= 0, \\ \theta_x &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}} \cdot \left(-\frac{xz}{r^3}\right), & \theta_y &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}} \cdot \left(-\frac{yz}{r^3}\right), & \theta_z &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right). \end{aligned}$$

Damit ergeben sich bereits die Vereinfachungen

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u}{\partial r} (r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial \theta} (\theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}) + \frac{\partial u}{\partial \varphi} (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}). \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} r_{xx} &= \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, & r_{yy} & \text{ und } r_{zz} \text{ analog, also } r_{xx} + r_{yy} + r_{zz} = \frac{2}{r}; \\ \varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= \frac{(-1) \cdot y \cdot 2x - (-1) \cdot x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0, \\ \theta_{xx} &= -\frac{1}{\left(\sqrt{r^2 - z^2}\right)^3} \frac{x^2 z}{r^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{r^2 - z^2}\right)^3} \frac{zr^2 - 2x^2 z}{r^4}, \\ \theta_{yy} &= -\frac{1}{\left(\sqrt{r^2 - z^2}\right)^3} \frac{y^2 z}{r^2} + \frac{1}{\left(\sqrt{r^2 - z^2}\right)^3} \frac{zr^2 - 2y^2 z}{r^4}, \\ \theta_{zz} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}} \frac{2zr^2 - z^2 \cdot 2z}{r^4}, \end{aligned}$$

und hiermit

$$\begin{aligned} \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz} &= -\frac{1}{\left(\sqrt{r^2 - z^2}\right)^3} \frac{1}{r^4} (x^2 z r^2 - (z r^2 - 2x^2 z)(r^2 - z^2) + y^2 z r^2 \\ &\quad - (z r^2 - 2y^2 z)(r^2 - z^2) - (2z r^2 - z^2 \cdot 2z)(r^2 - z^2)) \\ &= -\frac{z^3 r^2 - z r^4}{(r^2 - z^2) \sqrt{x^2 + y^2} r^4} = \frac{z r^2}{\sqrt{x^2 + y^2} r^4} \\ &= \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} = \frac{\cot \theta}{r^2}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Darstellung des Laplace-Operators:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Formulieren und beweisen Sie das Reynoldssche Transporttheorem für eine Raumdimension.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4 Wir betrachten das Anfangswertproblem

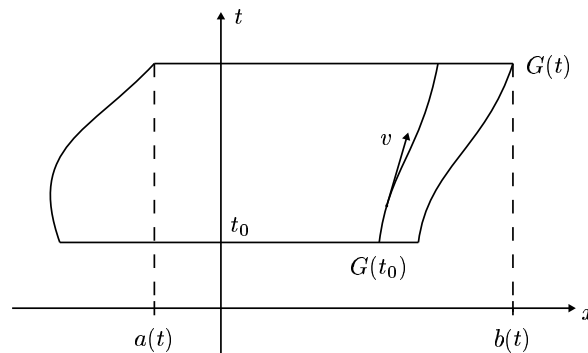
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v(y,t), \quad (y,t) \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2, \\ y(t_0) &= x. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$I_\delta := \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

und nehmen an:

$$\begin{aligned} \bigcup_{t \in I_\delta} (G(t), t) &\subset \mathcal{G}, \\ G(t) &:= (a(t), b(t)) := \{y = x(x, t_0; t), x \in G(t_0)\}. \end{aligned}$$



Zu zeigen: Für $v, \Phi \in C^1(\mathcal{G})$, $a, b \in C^1(I_\delta)$ folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \Phi(y,t) dy = \int_{a(t)}^{b(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\Phi(y,t), v(y,t)) \right] dy.$$

Aufgrund der Leibniz-Regel gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \Phi(y,t) dy = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(y,t) dy + \underbrace{\Phi(b(t),t)b'(t) - \Phi(a(t),t)a'(t)}_{=:\xi(t)},$$

$t \in I_\delta$. Für das "Geschwindigkeitsfeld" v gilt

$$v(b(t),t) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=b(t)} = b'(t), \quad v(a(t),t) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=a(t)} = a'(t)$$

und somit

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (\Phi \cdot v)(b(t),t) - (\Phi \cdot v)(a(t),t) \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial y} [(\Phi \cdot v)(y,t)] dy, \end{aligned}$$

woraus das gewünschte Resultat folgt.

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (6 Punkte) Zeigen Sie, daß für $\Phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $\Phi_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $c_0^2 > 0$ die Gesamtheit der Lösungen von

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \Phi_0(x), \quad u_t(x,0) = \phi_1(x)$$

durch die *d'Alembertsche Formel*

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[\Phi_0(x - c_0 t) + \Phi_0(x + c_0 t) + \frac{1}{c_0} \int_{x-c_0 t}^{x+c_0 t} \Phi_1(\xi) d\xi \right]$$

gegeben ist. Wie könnten Anfangswertproblem und Lösung für nur stetige Vorgaben Φ_0 und Φ_1 sinnvoll verallgemeinert werden?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 Wir müssen zeigen: (a) ist $u(t,x)$ durch die d'Alembertsche Formel gegeben, dann ist u Lösung des Anfangswertproblem; (b) jede Lösung des AWP's läßt sich durch die d'Alembertsche Formel darstellen.

(a) Aus Aufgabe 2 der 1. Übung ist bekannt, daß mit $\alpha = x - c_0 t$, $\beta = x + c_0 t$ die Gleichung $u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0$ übergeht in

$$\tilde{u}_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{mit } u(x,t) = \tilde{u}(\alpha(x,t), \beta(x,t)). \quad (*)$$

Die allgemeine Lösung von (*) lautet

$$\tilde{u}(\alpha, \beta) = F(\alpha) + G(\beta), \quad F, G \in C^2. \quad (**)$$

Ist nun $u(x,t)$ durch die d'Alembertsche Formel gegeben, so gilt

$$\tilde{u}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \left(\Phi_0(\alpha) + \Phi_0(\beta) + \frac{1}{c_0} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi_1(\xi) d\xi \right).$$

Hieraus folgt eine Darstellung der Form (**), wenn wir

$$F(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\Phi_0(\alpha) + \frac{1}{c_0} \int_{\alpha}^{\alpha_0} \Phi_1(\xi) d\xi \right), \quad G(\beta) = \frac{1}{2} \left(\Phi_0(\beta) + \frac{1}{c_0} \int_{\alpha_0}^{\beta} \Phi_1(\xi) d\xi \right)$$

wählen. Da ferner gilt: $\alpha = \beta = x$ für $t = 0$ und

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,x) &= \Phi_0(x), \quad \text{also } u(x,0) = \Phi_0(x), \\ u_t(x,0) &= -c_0 \tilde{u}_{\alpha}(x,x) + c_0 \tilde{u}_{\beta}(x,x) \\ &= -\frac{c_0}{2} \left[\frac{1}{2} \Phi_0'(x) - \frac{1}{c_0} \Phi_1(x) \right] + \frac{c_0}{2} \left[\frac{1}{2} \Phi_0'(x) + \frac{1}{c_0} \Phi_1(x) \right] \\ &= \Phi_1(x), \end{aligned}$$

ist somit bewiesen, daß die durch (*) definierte Funktion $u(x,t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

(b) Sei nun umgekehrt u eine Lösung des Anfangswertproblems; zu zeigen ist, daß u durch die d'Alembertsche Formel dargestellt werden kann. Wir wissen:

$$u(x,t) = g(x - c_0t) + h(x + c_0t), \quad g, h \in C^2(\mathbb{R}),$$

ist die allgemeine Lösung der Wellengleichung. Durch Einsetzen in die Anfangsbedingung folgt:

$$\begin{aligned} g(x) + h(x) &= \Phi_0(x), \\ -c_0g'(x) + c_0h'(x) &= \Phi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (***)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$2c_0h'(x) = c_0\Phi_0'(x) + \Phi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

und somit durch Integration

$$h(x) = \frac{1}{2}\Phi_0(x) + \frac{1}{2c_0} \int_{x_0}^x \Phi_1(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}$$

und damit (Einsetzen in (***))

$$g(x) = \frac{1}{2}\Phi_0(x) - \frac{1}{2c_0} \int_{x_0}^x \Phi_1(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Man liest sofort ab:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\Phi_0(x - ct) - \frac{1}{2c_0} \int_{x_0}^{x-c_0t} \Phi_1(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2}\Phi_0(x + ct) + \frac{1}{2c_0} \int_{x_0}^{x+c_0t} \Phi_1(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \left[\Phi_0(x - c_0t) + \Phi_0(x + c_0t) + \frac{1}{c_0} \int_{x-c_0t}^{x+c_0t} \Phi_1(\xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Nur stetige Vorgaben für Φ_0 und Φ_1 führen zu "Knicken" bzw. "Sprüngen" bei der durch die d'Alembertsche Formel gegebenen Funktion u bzw. ihren Ableitungen.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Lösen Sie das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_0^2 u_{xx} &= 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad c_0^2 > 0 \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

mit Hilfe der d'Alembertschen Lösungsformel, indem Sie ϕ und ψ zu geeigneten Funktionen Φ und Ψ auf \mathbb{R} fortsetzen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 Wir setzen die Funktionen ϕ und ψ wie folgt periodisch fort:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -\phi(-x) & \text{für } -L < x < 0, \\ \phi(x) & \text{für } 0 \leq x < L, \\ -\phi(L-x) & \text{für } L \leq x < 2L, \\ \vdots & \end{cases}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -\psi(-x) & \\ \psi(x) & \\ -\psi(L-x) & \\ \vdots & \end{cases}$$

und definieren

$$u(x,t) := \frac{1}{2} \left(\Phi(x - c_0 t) + \Phi(x + c_0 t) + \frac{1}{c_0} \int_{x-c_0 t}^{x+c_0 t} \Psi(\xi) d\xi \right). \quad (*)$$

Offenbar ist $u(x,t)$ Lösung der Wellengleichung, welche die Anfangsbedingungen erfüllt (siehe Aufgabe 1). Zu zeigen ist, daß u auch die Randbedingungen an $x = 0$ und $x = L$ erfüllt. Es gilt

$$u(0,t) = \frac{1}{2} \left(\Phi(-c_0 t) + \Phi(c_0 t) + \frac{1}{c_0} \int_{-c_0 t}^{c_0 t} \Psi(\xi) d\xi \right).$$

Da die Funktionen Φ und Ψ beide $\Phi(\xi) = -\Phi(-\xi)$ bzw. $\Psi(\xi) = -\Psi(-\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ erfüllen, gilt $u(0,t) = 0$. Ferner haben wir:

$$u(L,t) = \frac{1}{2} \left(\Phi(L - c_0 t) + \Phi(L + c_0 t) + \frac{1}{c_0} \int_{L-c_0 t}^{L+c_0 t} \Psi(\xi) d\xi \right).$$

Da die Funktionen außerdem in Bezug auf $x = L$ "ungerade", d.h. "punktsymmetrisch" sind ($\Phi(L+\xi) = -\Phi(L-\xi)$, $\Psi(L+\xi) = -\Psi(L-\xi)$), gilt analog $u(L,t) = 0$. Damit ist nachgewiesen, daß die durch (*) definierte Funktion $u = u(x,t)$ die Lösung des Anfangs-Randwertproblem ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Wie lauten die Lösungen folgender Cauchy-Probleme?

$$\text{a) } uu_x + u_y = 2, \quad u(y,y) = 1 + y, \quad \text{b) } yu_x + xu_y = x, \quad u(x,0) = x.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

a) Zu Lösen ist das Cauchy-Problem

$$uu_x + u_y = 2, \quad u(y,y) = 1 + y.$$

Die parametrische Darstellung der Anfangsbedingungen lautet

$$x_0(\tau) = \tau, \quad y_0(\tau) = \tau, \quad u_0(\tau) = 1 + \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Aus den charakteristischen Differentialgleichungen

$$\frac{dX}{ds} = U, \quad \frac{dY}{ds} = 1, \quad \frac{dU}{ds} = 2$$

erhalten wir (in dieser Reihenfolge!) mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$Y = s + c_2, \quad U = 2s + c_3, \quad X = s^2 + c_3s + c_1.$$

Zusammen mit den Anfangsbedingungen folgt für $s = 0$

$$c_2 = \tau, \quad c_3 = 1 + \tau, \quad c_1 = \tau$$

und somit

$$X(s, \tau) = s^2 + (1 + \tau)s + \tau, \quad (*)$$

$$Y(s, \tau) = s + \tau, \quad (**)$$

$$U(s, \tau) = 2s + 1 + \tau. \quad (***)$$

Aus (*) und (**) folgt

$$s = \frac{x}{y} - 1, \quad \tau = y - \frac{x}{y} + 1$$

und somit

$$u(x, y) = u\left(s(x, y), \tau(x, y)\right) = y + \frac{x}{y}.$$

Offenbar gilt $u(y, y) = y + 1$ und mit $u_x = \frac{1}{y}, u_y = 1 - \frac{x}{y^2}$ folgt

$$uu_x + uy = \frac{1}{y} \left(y + \frac{x}{y} \right) + 1 - \frac{x}{y^2} = 2.$$

b) Zu lösen ist das Cauchy-Problem

$$yu_x + xu_y = x, \quad u(x, 0) = x.$$

Die parametrische Darstellung der Anfangsbedingung lautet

$$x(\tau) = \tau, \quad y_0(\tau) = 0, \quad u_0(\tau) = \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Die charakteristischen Differentialgleichungen lauten

$$\frac{dX}{ds} = Y, \quad \frac{dY}{ds} = X, \quad \frac{dU}{dx} = X.$$

Für X gilt also

$$\frac{d^2X}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dX}{ds} \right) = \frac{dY}{ds} = X;$$

somit folgt

$$X = c_1 e^s + c_2 e^{-s}, \quad Y = c_1 e^s - c_2 e^{-s}, \quad U = c_1 e^s - c_2 e^{-s} + c_3$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Wir erhalten für $s = 0$:

$$\tau = c_1 + c_2, \quad 0 = c_1 - c_2, \quad \tau = c_1 - c_2 + c_3$$

und somit

$$c_1 = c_2 = \frac{\tau}{2}, \quad c_3 = \tau,$$

das heißt

$$X = \tau \cdot \cosh s, \quad y = \tau \cdot \sinh s, \quad U = \tau(1 + \sinh s). \quad \boxplus$$

Damit folgt:

$$x^2 - y^2 = \tau^2(\cosh^2 s - \sinh^2 s) = \tau^2$$

und somit

$$\tau = \pm \sqrt{x^2 - y^2} = x \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}},$$

$$\cosh s = \frac{x}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}},$$

also

$$s = \operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \right).$$

Mit $\operatorname{arcosh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ folgt

$$s = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} - 1} \right) = \ln \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) = \ln \left(\sqrt{\frac{x + y}{x - y}} \right)$$

und daher

$$u(x, y) = x \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{x + y}{x - y}} - \sqrt{\frac{x - y}{x + y}} \right) \right) = y + x \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}.$$

Bem.: Kürzer ist natürlich, $Y = \tau \sinh s$ direkt in \boxplus einzusetzen.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung von

$$(1 + x^2)u_x + \frac{x}{y}u_y = x^2 \cdot \sqrt{1 + u}$$

mit

a) $x_0(\tau) = \tan \tau, \quad y_0(\tau) = \tau + 1, \quad u_0(\tau) = \tau - 1,$

b) $x_0(\tau) = 0, \quad y_0(\tau) = \tau, \quad u_0(\tau) = -1.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

a) Mit

$$a(x,y,u) = 1 + x^2, \quad b(x,y,u) = \frac{x}{y}, \quad c(x,y,u) = x^2\sqrt{1+u}$$

lauten die charakteristischen Differentialgleichungen

$$\frac{dX}{ds} = 1 + x^2, \quad \frac{dY}{ds} = \frac{X}{Y}, \quad \frac{dU}{ds} = X^2\sqrt{1+U}.$$

Wir führen die Parameter $x_0(=c_1)$, $y_0(=c_2)$, $z_0(=c_3)$ als Anfangspunkte der Charakteristik ein (um den Zusammenhang zu Aufgabe 3 zu verdeutlichen). Dann gilt

$$\int_{x_0}^{X(s)} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \int_0^s d\sigma$$

und somit

$$\arctan X(s) - \arctan x_0 = s,$$

also

$$X(s) = \tan(\arctan x_0 + s). \quad (7.0.1)$$

Damit folgt aus der zweiten charakteristischen Differentialgleichung

$$\int_{y_0}^{Y(s)} \eta d\eta = \int_0^s \tan(\sigma + \arctan x_0) d\sigma,$$

also

$$\frac{Y^2(s)}{2} - \frac{y_0^2}{2} = \left[-\ln |\cos(\sigma + \arctan x_0)| \right]_0^s$$

und somit

$$Y(s) = \pm \sqrt{y_0^2 - 2 \ln \left| \frac{\cos(s + \arctan x_0)}{\cos(\arctan x_0)} \right|}. \quad (7.0.2)$$

Schließlich folgt aus der dritten charakteristischen DGL

$$\int_{u_0}^{U(s)} \frac{d\mu}{\sqrt{1+\mu}} = \int_0^s (\tan(\sigma + \arctan x_0))^2 d\sigma$$

und somit

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1+u(s)} - 2\sqrt{1+u_0} &= \left[\tan(\sigma + \arctan x_0) - \sigma \right]_{\sigma=0}^{\sigma=s} \\ \Rightarrow u(s) &= -1 + \left[\sqrt{1+u_0} + \frac{1}{2} (\tan(s + \arctan x_0) - x_0 - s) \right]^2. \end{aligned} \quad (7.0.3)$$

Wir betrachten

$$x_0(\tau) = \tan \tau, \quad y_0(\tau) = \tau + 1, \quad u_0(\tau) = \tau - 1 \quad (7.0.4)$$

mit

$$\tau \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Wir untersuchen, welche weiteren Bedingungen τ erfüllen muß. Es gilt

$$\begin{aligned} D(0, \tau) &:= \begin{vmatrix} a(x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau)) & b(x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau)) \\ \dot{x}_0(\tau) & \dot{y}_0(\tau) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \tan^2 \tau & \frac{\tan \tau}{\tau+1} \\ 1 + \tan^2 \tau & 1 \end{vmatrix} = (1 + \tan^2 \tau) \left(1 - \frac{\tan \tau}{\tau+1} \right), \quad \tau \neq -1; \end{aligned}$$

$D(0, \tau) \neq 0$ gilt also genau dann, wenn $\tan \tau \neq \tau + 1$ gilt. Wir haben als erste Bedingung:

$$\tau \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \tau^* \in \mathbb{R} \mid \tan \tau^* = \tau^* + 1 \right\} \cup \{-1\} \right). \quad (*)$$

Wir schließen aus (7.0.1)–(7.0.4):

$$x = X(s, \tau) = \tan(s + \tau), \quad (7.0.5)$$

$$y = Y_{\pm}(s, \tau) = \pm \sqrt{(\tau + 1)^2 - 2 \ln \left| \frac{\cos(s + \tau)}{\cos \tau} \right|}, \quad (7.0.6)$$

$$u = U(s, \tau) = -1 + \left[\sqrt{\tau} + \frac{1}{2} (\tan(s + \tau) - \tan(\tau - s)) \right]^2; \quad (7.0.7)$$

somit muß $\tau \geq 0$ gelten und wir erhalten als endgültige Bedingung für τ :

$$\tau \in \mathbb{R}_+ \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \tau^* \in \mathbb{R} \mid \tan \tau^* = \tau^* + 1 \right\} \right) =: \mathcal{T}.$$

Wegen

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial Y_{\pm}}{\partial s} \\ \frac{\partial X}{\partial \tau} & \frac{\partial Y_{\pm}}{\partial \tau} \end{array} \right|_{s=0} = \pm D(0, \tau) \neq 0 \quad \text{für } \tau \in \mathcal{T}$$

kann man (7.0.5) und (7.0.6) lokal (d.h., für $0 \leq |s| \leq s_1$) nach x und y auflösen (hier gibt es 2 Fälle!) und die Lösung $u(x, y) = U(S(x, y), T(x, y))$ (S, T Auflösungsfunktionen) aus (7.0.7) gewinnen.

b) Die folgenden Funktionen sind für alle $\tau \in \mathbb{R}$ wohldefiniert:

$$x_0(\tau) = 0, \quad y_0(\tau) = \tau, \quad u_0(\tau) = -1.$$

Wir haben

$$D(0, \tau) = \begin{vmatrix} a(0, \tau, -1) & b(0, \tau, -1) \\ \dot{x}_0(\tau) & \dot{y}_0(\tau) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

und brauchen für τ nur die Einschränkung (*) zu berücksichtigen. Setzen wir die hier vorliegenden Anfangsbedingungen in (7.0.5)–(7.0.7) ein, so folgt

$$x = X(s, \tau) = \tan s, \quad (7.0.8)$$

$$y = Y_{\pm}(s, \tau) = \pm \sqrt{\tau^2 - \ln(\cos^2 s)}, \quad (7.0.9)$$

$$u = U(s, \tau) = -1 + \frac{1}{4}(\tan s - s)^2.$$

Da

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y_{\pm}}{\partial s} \\ \frac{\partial X}{\partial \tau} & \frac{\partial Y_{\pm}}{\partial \tau} \end{array} \right|_{s=0} \neq 0$$

gilt, können (7.0.8) und (7.0.9) lokal wie folgt aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} s &= \arctan x =: S(x, y), & \tau &= T(x, y) & \text{und} \\ u &= u(x, y) = U(S(x, y), T(x, y)) = -1 + \frac{1}{4}(x - \arctan x)^2. \end{aligned}$$

Bemerkung: Auch $u \equiv 1$ ist eine Lösung. Beide Lösungen erhalten die Anfangskurve. Das System der charakteristischen Differentialgleichungen besitzt für $U = -1$ rechte Seiten, die dort keine Lipschitz-Bedingung mehr erfüllen.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

- Zeigen Sie, daß die Lösungen der Volterraschen Integralgleichungen (1.3.7) (im Beweis zu Satz 1.3.1) differenzierbar von der Anfangsvorgabe abhängen.
- Zeigen Sie, daß die zweiten partiellen Ableitungen $X_{s\tau}$, $Y_{s\tau}$, $U_{s\tau}$, X_{ss} , Y_{ss} , U_{ss} für $s \in [-S^1, S^1]$, $\tau \in [0, T_0]$ stetig sind.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5

- Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\mathbf{F}(\sigma, \tau) := \begin{pmatrix} X(\sigma, \tau) \\ Y(\sigma, \tau) \\ U(\sigma, \tau) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} := \begin{pmatrix} a(X(\sigma, \tau), Y(\sigma, \tau), U(\sigma, \tau)) \\ b(X(\sigma, \tau), Y(\sigma, \tau), U(\sigma, \tau)) \\ c(X(\sigma, \tau), Y(\sigma, \tau), U(\sigma, \tau)) \end{pmatrix} = \mathbf{a}(\mathbf{F}(\sigma, \tau)),$$

$$\mathbf{W}(\sigma, \tau) := \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \partial X / \partial \tau \\ \partial Y / \partial \tau \\ \partial U / \partial \tau \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{a} := \begin{pmatrix} \partial_1 a & \partial_2 a & \partial_3 a \\ \partial_1 b & \partial_2 b & \partial_3 b \\ \partial_1 c & \partial_2 c & \partial_3 c \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen, daß \mathbf{W} stetig ist. Hierzu nehmen wir an, eine Lösung \mathbf{F} der Volterraschen Integralgleichungen (1.3.7) sei gegeben. Diese Gleichungen schreiben wir kompakt als

$$\mathbf{F}(s, \tau) = \mathbf{F}_0(\tau) + \int_0^s \mathbf{a}(\mathbf{F}(\sigma, \tau)) d\sigma \quad (*)$$

mit $\mathbf{F}_0(\tau) := (x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau))^{\top}$. Differenzieren wir (*) nach τ , so folgt mit $\mathbf{W}_0(\tau) := (x'_0(\tau), y'_0(\tau), u'_0(\tau))^{\top}$:

$$\mathbf{W}(s, \tau) = \mathbf{W}_0(\tau) + \int_0^s \mathbf{a}(F(\sigma, \tau)) \cdot \mathbf{W}(\sigma, \tau) d\sigma. \quad (**)$$

Man beachte, daß $F(\sigma, \tau)$ in (**) eine bekannte Funktion ist. (**) stellt somit eine lineare Integralgleichung für $\mathbf{W}(s, \tau)$ dar. Diese Gleichung kann auch geschrieben werden als

$$\mathbf{W} = \tilde{T}(\mathbf{W}), \quad (***)$$

wobei der Operator \tilde{T} durch die rechte Seite von (**) gegeben ist. Für das nun anzuwendende Fixpunktargument gehen wir davon aus, daß sie Funktionen a, b, c und ihre partiellen Ableitungen nötigenfalls zu Funktionen mit kompaktem Träger abgeschnitten worden sind (wie im Skript). Daher sind die in $\nabla \mathbf{a}$ auftretenden Komponenten alle beschränkt und es gibt somit eine Konstante \tilde{L} mit

$$|\nabla a \cdot (\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2)| + |\nabla b \cdot (\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2)| + |\nabla c \cdot (\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2)| \leq \tilde{L} \|\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2\|_1$$

(analog zur Ungleichung (1.3.14) im Skript). Wir wählen $\tilde{\alpha} > \tilde{L}$, $q := \tilde{L}/\tilde{\alpha} < 1$, und betrachten (wie im Skript) den Vektorraum der auf $(s, \tau) \in [-S, S] \times [0, T_0] \equiv [-S, S] \times I$ stetigen vektorwertigen Funktionen:

$$B := (C^0([-S, S] \times I))^3,$$

versehen mit der gewichteten Maximumnorm (Bielecki-Norm)

$$\|\mathbf{W}\| := \max_{|s| \leq s, t \in I} \left\| \mathbf{W}(s, \tau) e^{-\tilde{\alpha}|s|} \right\|_2.$$

Dann erhalten wir aus (**) die sukzessive Approximation

$$\mathbf{W}_{n+1}(s, \tau) = \mathbf{W}_0(\tau) + \int_0^s \nabla \mathbf{a}(F(\sigma, \tau)) \mathbf{W}_n(\sigma, \tau) d\sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

für die Fixpunktgleichung (***). Man zeigt nun, daß \tilde{T} in B eine Kontraktion ist; es gilt nämlich

$$\begin{aligned} & \left| (\tilde{T}(\mathbf{W}_1) - \tilde{T}(\mathbf{W}_2)) e^{-\tilde{\alpha}|s|} \right| \\ & \leq e^{-\tilde{\alpha}|s|} \left\{ \left| \int_0^s \nabla a(\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2) d\sigma \right| + \left| \int_0^s \nabla b(\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2) d\sigma \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| \int_0^s \nabla c(\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2) d\sigma \right| \right\} \\ & \leq 3e^{-\tilde{\alpha}|s|} L \int_0^s \|\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2\|_1 e^{-\tilde{\alpha}|\sigma|} e^{-\tilde{\alpha}|\sigma|} \\ & \leq \|\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2\| \cdot 9e^{-\tilde{\alpha}|s|} e^{\tilde{\alpha}|s|} \cdot \frac{1}{\tilde{\alpha}} = 9 \cdot \|\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2\|. \end{aligned}$$

Damit ist \tilde{T} eine Kontraktion und \mathbf{W}_n konvergiert in B somit gleichmäßig gegen die einzige Lösung der Fixpunktgleichung (***). Insbesondere ist der Fixpunkt \mathbf{W} in B , also eine Funktion mit stetigen Ableitungen bezüglich τ , was zu zeigen war.

- b) Die Stetigkeit der gemischten partiellen Ableitungen folgt, indem man die Gleichung (1.3.7) nach s differenziert und dann eine analoge Betrachtung durchführt. Ebenso für alle weiteren partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (6 Punkte) Beweisen Sie Lemma 1.3.5.

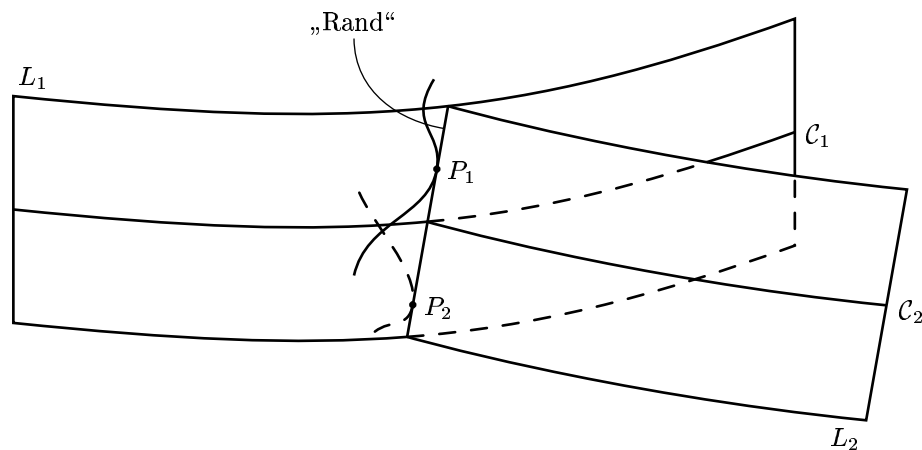
Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1¹

- (1) Sei L_1 die Lösungsfläche zum AWP₁ und L^2 eine Lösungsfläche zum AWP₂ derselben partiellen Differentialgleichung. Dann schneiden sich zwei Lösungsflächen im regulären Bereich

$$R = \mathcal{G} \setminus \Sigma = \mathcal{G} \setminus \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a(x, y, z) = b(x, y, z) = 0 \},$$

d.h. es soll gelten: $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Damit existiert ein Punkt $(x_0, y_0, u(x_0, y_0)) \in L_1 \cap L_2$. Somit aber existiert eine Charakteristik \mathcal{C}_0 durch $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$. Nach Lemma 1.3.5 (welches anwendbar ist, da $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$; $a \neq 0 \neq b \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$) ist $\mathcal{C}_0 \subset L_1$, aber auch $\mathcal{C}_0 \subset L_2$ und es muß wegen der Eindeutigkeit von \mathcal{C}_0 (durch den Punkt $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ gegeben) gelten: $\mathcal{C}_0 \subset L_1 \cap L_2$. Sei nun $(x'_0, y'_0, u'(x'_0, y'_0))$ (o.B.d.A. verschieden von $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$) ein weiterer Punkt aus $L_1 \cap L_2$. Dann liegt dieser entweder auf \mathcal{C}_0 oder auf einer weiteren Charakteristik \mathcal{C}'_0 . Somit schneiden sich die Lösungsflächen nur längs Charakteristiken (alle Punkte aus $L_1 \cap L_2$ liegen auf Charakteristiken).

- (2) Berühren sich zwei Lösungen in einem Punkt, so ist wie in (1) $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Dann gibt es aber wie in (1) eine Charakteristik durch diesen Punkt, die sowohl in L_1 als auch in L_2 liegt. Folglich gehört auch diese Charakteristik zu $L_1 \cap L_2$.
- (3) Wir betrachten die nachfolgende skizzierte Situation. Die Lösungsflächen L_1 und L_2 mögen sich verzweigen; also gilt $L_1 \neq L_2$, $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Es gibt somit gemeinsame Punkte und gemäß (1) sei $L_1 \cap L_2 = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$ mit Charakteristiken \mathcal{C}_i . Zu zeigen ist, daß auch der Rand von $L_1 \cap L_2$ eine Charakteristik ist. Sei nun $P_1 \in L_1 \cap L_2$ ein Randpunkt, welcher



auf der Charakteristik \mathcal{C}_1 liege. Wir nehmen an, \mathcal{C}_1 sei nicht „Rand“. Dann existiert ein weiterer Punkt $P_2 \neq P_1 \in L_1 \cap L_2$, der auf dem Rand liegt. Auch durch diesen muß eine Charakteristik gehen, die hier \mathcal{C}_2 genannt wird; es gilt dann $\mathcal{C}_2 \neq \mathcal{C}_1$, und \mathcal{C}_2 muß wie \mathcal{C}_1 sowohl in L_1 als auch in L_2 liegen, d.h. $\mathcal{C}_2 \subset L_1 \cap L_2$ und $\mathcal{C}_1 \subset L_1 \cap L_2$. Dann muß es aber einen Schnittpunkt von \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 geben, im Widerspruch dazu, daß Charakteristiken sich nicht schneiden dürfen.

¹ nach: Lösung von K. Witowski, M. Gulde und D. Haase

Aufgabe 2 (6 Punkte) Für die Erhaltungsgleichung des Verkehrsproblems

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(11\rho \log \frac{142}{\rho} \right) = 0$$

und das Anfangsdatum

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) = \begin{cases} 10 & \text{für } x \leq 0 \text{ und } x \geq 60, \\ x + 10 & \text{für } 0 \leq x \leq 30, \\ -x + 70 & \text{für } 30 < x < 60 \end{cases}$$

führe man das Charakteristikenverfahren zur Bestimmung von ρ für $t = 0.5, 1.0, 1.5$ und 2.4 graphisch durch.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 Die vorgelegte partielle Differentialgleichung ist vom Typ einer Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0 \quad (*)$$

oder

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + f'(\rho) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (**)$$

mit den charakteristischen Differentialgleichungen

$$\frac{dX}{ds} = 1, \quad \frac{dY}{ds} = f'(U), \quad \frac{dU}{ds} = 0.$$

(um mit den bisherigen Aufgaben konsistent zu bleiben, treffen wir die Zuordnung $X \leftrightarrow t$, $Y \leftrightarrow x$, $U \leftrightarrow s$). Wir erhalten mit Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3 :

$$X(s) = s + c_1, \quad U(s) = c_3, \quad Y(s) = f'(c_3) \cdot s + c_2.$$

Das Anfangsdatum $s = 0$ wird mit $\tau = x_0$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\begin{aligned} X(0, x_0) &= 0, & \text{also } c_1 &= 0, \\ U(0, x_0) &= \rho_0(\tau) = \rho_0(x_0), & \text{also } c_3 &= \rho_0(x_0), \\ Y(0, x_0) &= x_0, & \text{also } c_2 &= x_0. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$X(s, x_0) = s, \quad U(s, x_0) = \rho_0(x_0), \quad Y(s, x_0) = f'(\rho_0(x_0)) \cdot s + x_0$$

oder mit $t = s$ (aus der ersten dieser Gleichungen)

$$\rho(t, x_0) = \rho_0(x_0), \quad (7.0.1)$$

$$x(t, x_0) = x_0 + f'(\rho_0(x_0)) \cdot t. \quad (7.0.2)$$

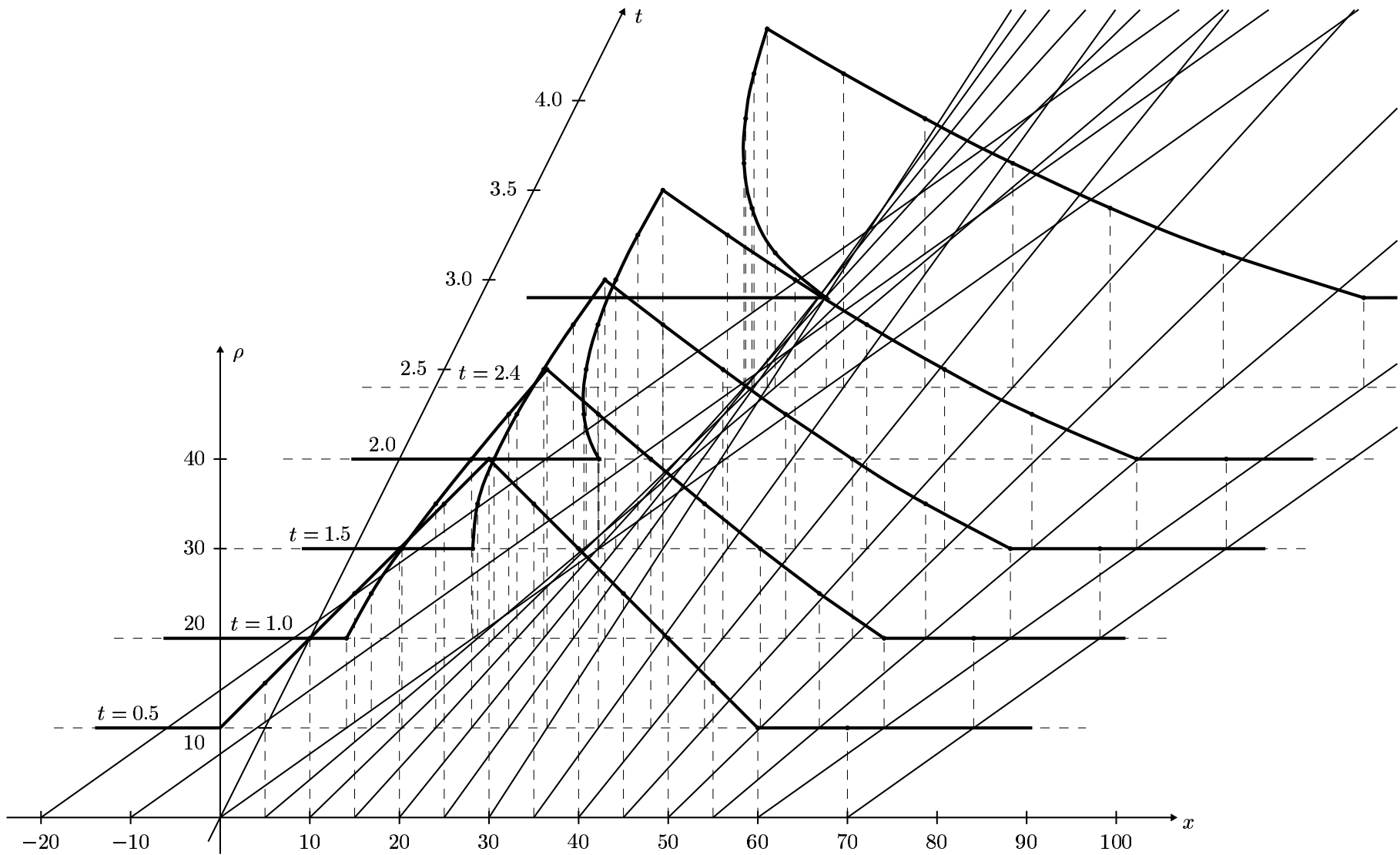
Damit gilt: die Charakteristiken von (*) (oder (**)) sind Geraden, deren Gleichung durch (7.0.2) gegeben ist. Auf der Geraden, die die x -Achse an der Stelle x_0 schneidet, ist die Lösung konstant und nimmt den Wert $\rho_0(x_0)$ an. Entlang der Geraden (7.0.2) wird also gerade der Anfangswert $\rho_0(x_0)$ transportiert. Wir haben hier $f(\rho) = 11\rho \log \frac{142}{\rho}$ und somit

$$f'(\rho) = 11 \left(1 \cdot \log \frac{142}{\rho} + \rho \cdot \frac{\rho}{142} \cdot \frac{-142}{\rho^2} \right) = 11 \left(\log \frac{142}{\rho} - 1 \right).$$

Zur Durchführung des Charakteristikenverfahrens auf graphischem Wege ist folgende Tabelle nützlich:

x_0	$\rho_0(x_0)$	$f'(\rho_0(x_0))$	$(f'\rho_0(x_0))^{-1}$
< 0	10	18.186	0.05499
0	10	18.186	0.05499
5	15	13.726	0.07286
10	20	10.561	0.09469
15	25	8.1065	0.12336
20	30	6.1009	0.16391
25	35	4.4053	0.22700
30	40	2.9364	0.34055
35	35	4.4053	0.22700
40	30	6.1009	0.16391
45	25	8.1065	0.12336
50	20	10.561	0.09469
55	15	13.726	0.07286
60	10	18.186	0.05499
> 60	10	18.186	0.05499

In der nachfolgenden Zeichnung erkennt man, daß sich die linke "Flanke" der Lösung aufsteilt und es zu einer "Überwerfung" der charakteristischen Flächen kommt, d.h. für einige x wird die Lösung mehrwertig. Dieser (unerwünschten) Eigenschaft wird (später in der Vorlesung) durch Einführung eines Auswahlkriteriums (einer Entropiebedingung) begegnet.



Aufgabe 3 (6 Punkte) Ermitteln Sie Basislösungen zu

$$x\phi_x + yz\phi_y + z^2\phi_z = 0.$$

Verwenden Sie diese anschließend, um das Anfangswertproblem mit

$$\phi(1, y, z) = y + z$$

zu lösen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 Aus den charakteristischen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{ds} = x, \quad \frac{dy}{ds} = yz, \quad \frac{dz}{ds} = z^2, \quad \frac{d\Phi}{ds} = 0$$

folgt

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{z^2} = ds.$$

Wir suchen zwei glatte Funktionen, die längs der Charakteristiken jeweils konstant (und damit im regulären Bereich der vorgelegten partiellen Differentialgleichung Lösungen) sind.

Aus $\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{z^2}$ folgt $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ und somit $z dy - y dz = 0$; damit ist $\frac{z dz - y dz}{z^2} = 0$ und daher $\frac{y}{z} = c_1 \in \mathbb{R}$. Wir haben also

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{y}{z}, \quad z \neq 0.$$

Weiterhin gilt $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2} \Rightarrow d(\ln x) = d\left(-\frac{1}{z}\right) \Rightarrow d\left(\frac{1}{z} + \ln x\right) = 0$. Damit folgt $\frac{1}{z} + \ln x = c_2$ und somit

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{1}{z} + \ln x. \quad (x > 0, z \neq 0)$$

Wegen

$$\text{rang}(\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2) = \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{-y}{z^2} & -\frac{1}{z^2} \end{bmatrix} \right) \neq 0, \quad ((x, y, z) \neq (0, y, 0))$$

bilden Φ_1 und Φ_2 eine Basis. Die allgemeine Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung im regulären Bereich lautet daher

$$\Phi(x, y, z) = \chi\left(\frac{y}{z}, \frac{1}{z} + \ln x\right), \quad \chi \in C^1 \text{ beliebig.}$$

Zur Lösung des Anfangswertproblems betrachten wir

$$y + z \stackrel{!}{=} \Phi(1, y, z) = \chi\left(\frac{y}{z}, \frac{1}{z}\right).$$

Mit der Substitution $u = \frac{y}{z}$, $v = \frac{1}{z}$, d.h. $z = \frac{1}{v}$, $y = \frac{u}{v}$ folgt $\chi(u, v) = \frac{u+1}{v}$ und damit

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\frac{y}{z} + 1}{\frac{1}{z} + \ln x} = \frac{y + z}{1 + z \ln x}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Zeigen Sie, daß die Kurven

$$\phi_1(x_1, \dots, x_n) = k_1, \dots, \phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = k_{n-1}$$

mit Basislösungen $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ und Konstanten k_1, \dots, k_{n-1} im regulären Gebiet die Charakteristiken sind.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4 Mit den Bezeichnungen $B \subset \mathbb{R}^n$: ein regulärer Bereich der partiellen Differentialgleichung, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{x} := (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n)$ halten wir fest: die Funktionen Φ_i erfüllen die Differentialgleichung

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in B, i = 1, \dots, n-1 \quad (7.0.1)$$

und die Bedingung

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_n} \end{bmatrix} (\mathbf{x}) = n-1 \quad \forall \mathbf{x} \in B. \quad (7.0.2)$$

Wegen (7.0.2) muß in der $(n-1) \times n$ -Matrix für jedes $\mathbf{x} \in B$ eine (o.B.d.A. die durch Weglassen der Spalte n entstehende) $(n-1)$ -Unterdeterminante von Null verschieden sein.

Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$ ($1 \leq i, j \leq n-1$) folgt, daß diese Unterdeterminante in einer ganzen Umgebung von \mathbf{x} von Null verschieden ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann das System

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_n) = k_1, \quad \dots, \quad \Phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = k_{n-1}$$

lokal nach \tilde{x} aufgelöst werden. d.h. es gibt ein Intervall $I := (\alpha, \beta) \ni \tilde{x}_n$ und eine Abbildung $\tilde{\eta} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{\eta} \in (C^1(I))^{n-1}$ mit

$$\begin{aligned} \Phi_i(\tilde{\eta}(s), s) &= k_i \quad \text{für } s \in I \text{ und } i = 1, \dots, n-1, \\ \tilde{\eta}(x_n) &= \tilde{x}. \end{aligned} \quad (*)$$

Sei nun $\varphi(s) := (\tilde{\eta}(s), s)$. Differentiation von (*) nach s liefert

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(\varphi(s)) \frac{\partial \tilde{\eta}_j}{\partial s}(s) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n}(\varphi(s)) = 0, \quad s \in I, \quad i = 1, \dots, n.$$

Das können wir auch schreiben als

$$(\nabla \Phi_i)(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = 0, \quad s \in I, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Insbesondere folgt aus (7.0.1), daß für $\mathbf{x} = \varphi(s) \in B$ gilt:

$$(\nabla \Phi_i)(\varphi(s)) \cdot \mathbf{a}(\varphi(s)) = 0, \quad s \in I, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Wegen (7.0.2) ist für jedes feste s der Nullraum der durch die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(\varphi(s)) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(\varphi(s)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_1}(\varphi(s)) & \cdots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_n}(\varphi(s)) \end{bmatrix}$$

definierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ höchstens eindimensional. Wegen $\mathbf{a}(\varphi(s)) \neq 0$ ($\varphi(s) \in B$, $\varphi'(s) \neq 0$, $\forall s \in I$) gilt daher

$$\mathbf{a}(\varphi(s)) = \lambda(s) \cdot \varphi'(s)$$

mit einer stetigen Funktion $\lambda : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(s) \neq 0$, $s \in I$. Die Parametertransformation

$$s \mapsto \sigma(s) := \int_{\alpha}^s \frac{1}{\lambda(t)} dt$$

ist wegen $\sigma'(s) = \frac{1}{\lambda(s)}$ monoton, also invertierbar: $s = \tilde{\sigma}(\sigma)$ und es gilt

$$1 = \frac{d\tilde{\sigma}}{ds} = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \cdot \frac{1}{\lambda(s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} = \lambda.$$

Die nun parametrisierte Kurve $\sigma \mapsto \varphi(\tilde{\sigma}(\sigma))$ erfüllt wegen

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \lambda$$

die Differentialgleichungen $\frac{d\varphi}{d\sigma} = \mathbf{a}(\varphi(\sigma))$, ist also (lokal) eine Charakteristik.

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (6 Punkte) Berechnen Sie die Lösungen der Cauchyschen Anfangswertprobleme für $xy - u_x u_y = 0$ und

a) $u(1, y) = y^2,$

b) $u(x, x) = \sqrt{2}x^2.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

a) Wir haben hier die Anfangskurve

$$\mathcal{C} : \left\{ (x_0(\tau) = 1, \quad y_0(\tau) = \tau, \quad u_0(\tau) = \tau^2), \quad \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

und den Anfangsstreifen

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \right. \\ \left. F(x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)) = 0, \right. \\ \left. p_0(\tau) \frac{dx_0}{d\tau} + q_0(\tau) \frac{dy_0}{d\tau} = \frac{du_0}{d\tau} \right\},$$

d.h. auf \mathcal{S} gilt

$$x_0(\tau)y_0(\tau) - p_0(\tau)q_0(\tau) = 0 \quad \wedge \quad p_0(\tau) \cdot 0 + q_0(\tau) \cdot 1 = 2\tau,$$

woraus folgt:

$$p_0(\tau) = \frac{1}{2}, \quad q_0(\tau) = 2\tau, \quad \mathcal{S} = \left\{ \left(1, \tau, \tau^2, \frac{1}{2}, 2\tau \right) \mid \tau \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir untersuchen, ob der Anfangsstreifen etwa charakteristisch ist. Hier gilt daher

$$\left| \begin{array}{cc} F_p|_{\mathcal{S}} & F_q|_{\mathcal{S}} \\ \frac{dx_0}{d\tau} & \frac{dy_0}{d\tau} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} -q_0(\tau) & -p_0(\tau) \\ 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} -2\tau & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{array} \right| = -2\tau,$$

d.h. \mathcal{S} ist genau dann nicht charakteristisch, wenn $\tau \neq 0$ gilt. Die charakteristischen Differentialgleichungen lauten hier

$$\frac{dX}{ds} = -Q, \quad \frac{dY}{ds} = -P, \quad \frac{du}{ds} = P \cdot (-Q) + Q \cdot (-P) = -2PQ, \quad \frac{dP}{ds} = -Y, \quad \frac{dQ}{ds} = -X.$$

Aus

$$\frac{d^2 X}{ds^2} = -\frac{dQ}{ds} = X$$

folgt

$$X(s) = c_1 e^s + c_2 e^{-s}, \quad Q(x) = -c_1 e^s + c_2 e^{-s}$$

und aus

$$\frac{d^2 Y}{ds^2} = -\frac{dP}{ds} = Y$$

folgt

$$Y(s) = c_3 e^s + c_4 e^{-s}, \quad P(x) = -c_3 e^s + c_4 e^{-s}.$$

Die Konstanten c_1 bis c_4 werden nun aus den Anfangsbedingungen ermittelt. Für $s = 0$ gilt

$$c_1 + c_2 = 1, \quad -c_1 + c_2 = 2\tau, \quad c_3 + c_4 = \tau, \quad -c_3 + c_4 = \frac{1}{2},$$

woraus folgt:

$$c_1 = -\tau + \frac{1}{2}, \quad c_2 = \tau + \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{4}, \quad c_4 = \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} x &= X(s, \tau) = \cosh s - 2\tau \sinh s, \\ y &= Y(s, \tau) = \tau \cosh s - \frac{1}{2} \sinh s, \\ p &= P(s, \tau) = -\tau \sinh s + \frac{1}{2} \cosh s, \\ q &= Q(s, \tau) = 2\tau \cosh s - \sinh s. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -2P(s, \tau)Q(s, \tau), \quad U(0, \tau) = u_0(\tau) = \tau^2$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s} &= -2 \left(-\tau \sinh s + \frac{1}{2} \cosh s \right) (2\tau \cosh s - \sinh s) \\ &= -2 \left(- \left(2\tau^2 + \frac{1}{2} \right) \cosh s \cdot \sinh s + \tau \underbrace{\cosh^2 s}_{=\frac{1}{2}(1+\cosh(2s))} + \tau \underbrace{\sinh^2 s}_{=\frac{1}{2}(\cosh(2s))} \right) \\ &= \left(2\tau^2 + \frac{1}{2} \right) \sinh(2s) + (-2) \cdot \tau \cdot \cosh(2s), \\ u = U(s, \tau) &= \left(2\tau^2 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cosh(2s) - \tau \sinh(2s) + \tau^2 - \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) \\ &= \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) \cosh(2s) - \tau \sinh(2s) - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Wir eliminieren nun s und τ über

$$\begin{aligned} x^2 &= \cosh^2 s - 4\tau \sinh s \cdot \cosh s + 4\tau^2 \sinh^2 s, \\ 4y^2 &= 4\tau^2 \cosh^2 s - 4\tau \sinh s \cdot \cosh s + \sinh^2 s, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$x^2 - 4y^2 = (1 - 4\tau^2) (\cosh^2 s - \sinh^2 s) = 1 - 4\tau^2,$$

also

$$\tau = y \sqrt{1 + \frac{1-x^2}{4y^2}} =: T(x, y).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} 4\tau y - x &= 4\tau^2 \cosh s - 2\tau \sinh s - \cosh s + 2\tau \sinh s \\ &= (4\tau^2 - 1) \cosh s \end{aligned}$$

und damit

$$s = \operatorname{arcosh} \frac{4y^2 \sqrt{1 + \frac{1-x^2}{4y^2}} - x}{4y^2 + (1-x^2) - 1} = \operatorname{arcosh} \frac{x - 4y^2 \sqrt{1 + \frac{1-x^2}{4y^2}}}{x^2 - 4y^2} =: S(x, y),$$

also

$$\cosh s = \frac{x - 4y^2 \sqrt{1 + \frac{1-x^2}{4y^2}}}{x^2 - 4y^2}.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} x^2 &= \cosh^2 s - 4\tau \cosh s \cdot \sinh s + 4\tau^2 \underbrace{\sinh^2 s}_{=\cosh^2 s - 1} \\ &= (1 + 4\tau^2) \cosh^2 s - 4\tau^2 - 2\tau \sinh(2s) \end{aligned}$$

und schließlich

$$u(x, y) = \frac{1}{4} (x^2 + 4y^2 - 1).$$

b) Anfangskurve:

$$\mathcal{C} : \left\{ \left(x_0(\tau) = \tau, \quad y_0(\tau) = \tau, \quad u_0(\tau) = \sqrt{2}\tau^2 \right) \mid \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

Anfangsstreifen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ (x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)) \mid \tau \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \right. \\ &\quad \left. x_0(\tau)y_0(\tau) - p_0(\tau)q_0(\tau) = 0, p_0(\tau) + q_0(\tau) = 2\sqrt{2}\tau \right\}, \end{aligned}$$

d.h. auf \mathcal{S} gilt $p_0(\tau) = \tau(\sqrt{2} \pm 1)$, $q_0(\tau) = \tau(\sqrt{2} \mp 1)$. Wir haben also zwei verschiedene Anfangsstreifen:

$$\mathcal{S}_{\text{I, II}} : \begin{cases} x_0(\tau) = \tau, & y_0(\tau) = \tau, & u_0(\tau) = \sqrt{2}\tau^2, \\ p_0(\tau) = \tau(\sqrt{2} \pm 1), & q_0(\tau) = \tau(\sqrt{2} \mp 1). \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} F_p|_{\mathcal{S}_{\text{I, II}}} \\ \frac{dx_0}{d\tau} \end{array} \quad \begin{array}{c} F_q|_{\mathcal{S}_{\text{I, II}}} \\ \frac{dy_0}{d\tau} \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cc} -q_0(\tau) & -p_0(\tau) \\ 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} -2\tau & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 0(\tau) - q_0(\tau) \\ &= \pm 2\tau \neq 0 \quad \text{genau dann, wenn } \tau \neq 0. \end{aligned}$$

Wie beim Aufgabenteil a) erhält man

$$\begin{aligned} X(s) &= c_1 e^s + c_2 e^{-s}, & Y(s) &= c_3 e^s + c_4 e^{-s}, \\ P(x) &= -c_3 e^s + c_4 e^{-s}, & Q(x) &= -c_1 e^s + c_2 e^{-s} \end{aligned}$$

mit $c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}$. Für $s = 0$ gilt $c_1 + c_2 = \tau$, $-c_1 + c_2 = \tau(\sqrt{2} \mp 1)$ und daher

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\tau - \tau(\sqrt{2} \mp 1)}{2}, & c_2 &= \frac{\tau + \tau(\sqrt{2} \mp 1)}{2} : \\ X(s, \tau) &= \frac{\tau - \tau(\sqrt{2} \mp 1)}{2} e^s + \frac{\tau + \tau(\sqrt{2} \mp 1)}{2} e^{-s}, \end{aligned}$$

also

$$x = X(s, \tau) = \tau \cosh s - \tau(\sqrt{2} \mp 1) \sinh s$$

und analog

$$\begin{aligned} q &= Q(s, \tau) = -\tau \sinh s + \tau(\sqrt{2} \mp 1) \cosh s, \\ y &= Y(s, \tau) = \tau \cosh s - \tau(\sqrt{2} \mp 1) \sinh s, \\ p &= P(s, \tau) = -\tau \sinh s + \tau(\sqrt{2} \pm 1) \cosh s. \end{aligned}$$

Über

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s, \tau) = -2P(s, \tau)Q(s, \tau), \quad U(0, \tau) = u_0(\tau) = \sqrt{2}\tau^2$$

folgt unter der Verwendung der "Additionstheoreme"

$$\begin{aligned} \cosh(2s) &= \cosh^2 s + \sinh^2 s, & \frac{\cosh(2s) + 1}{2} &= \cosh^2 s, \\ \sinh(2s) &= 2 \sinh s \cdot \cosh s, & \frac{\cosh(2s) - 1}{2} &= \sinh^2 s : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s}(s, \tau) &= -2 \left(\tau^2 \sinh^2 s - 2\sqrt{2}\tau^2 \sinh s \cdot \cosh s + \tau^2 \cosh^2 s \right) \\ &= -2\tau^2 \cosh(2s) + 2\sqrt{2}\tau^2 \sinh(2s) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} u &= U(s, \tau) = -\tau^2 \sinh(2s) + \sqrt{2}\tau^2 \cosh(2s) \\ &= -2\tau^2 \sinh s \cdot \cosh s + 2\sqrt{2}\tau^2 (1 + 2 \sinh^2 s) \\ &= \frac{2}{8\sqrt{2}} \left\{ -8\sqrt{2}\tau^2 \sinh s \cdot \cosh s + 8\tau^2 (1 + 2 \sinh^2 s) \right\}. \end{aligned}$$

Wir eliminieren nun s und t über

$$\begin{aligned} x - y &= \pm 2\tau \sinh s, \\ x + y &= 2\tau \cosh s - \tau \cdot 2\sqrt{2} \sinh s = 2\tau \cosh s - \sqrt{2}(\pm(x - y)), \end{aligned}$$

also

$$2\tau \cosh s = (x + y) \pm \sqrt{2}(x - y) = (1 \pm \sqrt{2})x + (1 \mp \sqrt{2})y;$$

hiermit gilt

$$\begin{aligned} 2\tau \sinh s &= \pm(x - y), \\ 2\tau \cosh s &= (1 \pm \sqrt{2})x + (1 \mp \sqrt{2})y; \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= -8\sqrt{2}\tau^2 \sinh s \cosh s + 8\tau^2 \sinh^2 s + 4\tau^2 \cosh^2 s, \\ u(x, y) &= U(S(x, y), T(x, y)) = \frac{2}{8\sqrt{2}} \left((x + y)^2 + 4\tau^2 \underbrace{(1 + \sinh^2 s)}_{= \cosh^2 s} \right) \\ &= \frac{2}{8\sqrt{2}} \left((x + y)^2 + \left((1 \pm \sqrt{2})x + (1 \mp \sqrt{2})y \right)^2 \right) \\ &= \frac{2}{8\sqrt{2}} \left((4 \pm 2\sqrt{2})x^2 + (4 \mp 2\sqrt{2})y^2 \right) \\ &= \pm \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte) Im Punkt (x_0, y_0, u_0) sei für alle möglichen Tangentialebenen $p_0(\tau)$, $q_0(\tau)$ mit

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0(\tau), q_0(\tau)) = 0$$

die Bedingung

$$(F_p^2 F_{qq} - 2F_q F_p F_{pq} + F_q^2 F_{pp})(x_0, y_0, u_0, p_0(\tau), q_0(\tau)) \neq 0$$

erfüllt. Zeigen Sie, daß unter dieser Bedingung das Integral-Konoid in einer Umgebung des Spitzenpunktes mit Ausnahme desselben eine Lösung der Differentialgleichung $F = 0$ definiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 Im regulären Bereich der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ ist die Gleichung $F(x_0, y_0, p, q) = 0$ lokal nach p oder q auflösbar, wenn sie für ein Wertepaar $p = \tilde{p}_0$, $q = \tilde{q}_0$ erfüllt (was i.a. natürlich nicht der Fall sein muß). Wir nehmen daher an, es gebe ein kompaktes Intervall $T \subset \mathbb{R}$ und glatte Funktionen $p_0, q_0 : T \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(i) $F(x_0, y_0, u_0, p_0(\tau), q_0(\tau)) = 0$ für $\tau \in T$,

(ii) $(x_0, \dots, q_0(\tau))$ gehöre für $\tau \in T$ zum regulären Bereich,

(iii) $|p_0(\tau)| + |q_0(\tau)| > 0$ für $\tau \in T$,

(iv) die Bedingung aus der Aufgabenstellung sei erfüllt.

Sei $s \mapsto (x(s,\tau), \dots, q(s,\tau))$ die Lösung des Systems der charakteristischen Differentialgleichung zum Anfangswert $(x_0, \dots, q_0(\tau))$ für $s = 0$. Somit ist die Familie von Kurven $\tau \mapsto (x(\cdot, \tau), \dots, q(\cdot, \tau))$ das Integralkonoid. Die "entartete" Anfangskurve $\tau \mapsto (x_0, \dots, q_0(\tau))$ erfüllt zwar die Streifenbedingung, ist aber wegen

$$D(s,\tau) := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau}(s,\tau) & F_p(x(s,\tau), \dots) \\ \frac{\partial y}{\partial \tau}(s,\tau) & F_q(\dots) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{für } s = 0$$

charakteristisch, so daß die Argumentation über Satz 1.5.4 zunächst versagt. Wir zeigen nun:

- (a) $\frac{\partial}{\partial s} D(0;\tau) \neq 0$ für $\tau \in T$,
- (b) die Funktion $(s,\tau) \mapsto (x(s,\tau), y(s,\tau))$ ist auf $\{0 < |s| < s_0\} \times T$ ($s_0 > 0$ geeignet klein) lokal invertierbar,
- (c) die jeweiligen Umkehrfunktionen S, T definieren mittels

$$(x,y) \mapsto u(S(x,y), T(x,y)) \quad (*)$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung $F = 0$.

Da sie durch (*) gegebene Lösungsfläche nach Konstruktion im Integralkonoid enthalten ist und die lokale Invertierung für alle Punkte des Integralkonoids in einer Umgebung des Spitzenpunktes möglich ist, ist damit die Behauptung gezeigt.

- (a) Unter Weglassen der Argumente $s = 0$ und τ gilt bei Widerspruchsannahme:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial s} D(0,\tau) = \frac{\partial}{\partial s} (F_p y_\tau - F_q x_\tau) \\ &= F_{ps} y_\tau + F_p y_{\tau s} - F_{qs} x_\tau - F_q x_{\tau s} \\ &= F_p y_{\tau s} - F_q x_{\tau s} \\ &= F_p F_{q\tau} - F_q F_{p\tau} \\ &= F_p (F_{qp} p_\tau + F_{qq} q_\tau) - F_q (F_{pp} p_\tau + F_{pq} q_\tau) \\ &= p_\tau (F_p F_{pq} - F_q F_{pp}) + q_\tau (F_q F_{qp} - F_p F_{pq}) \end{aligned} \quad (7.0.1)$$

aufgrund der Schwarzschen Vertauschungsregel, der charakteristischen Differentialgleichungen, der Kettenregel und unter Beachtung von $\frac{\partial}{\partial \tau} x(0,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} x_0 = 0$, usw.

Andererseits ist trivialerweise

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} F(x(s,\tau), \dots, q(s,\tau)) \right|_{s=0} = 0,$$

d.h.

$$(F_p p_\tau + F_q q_\tau)|_{s=0} = 0. \quad (7.0.2)$$

Wegen (iii) muß die Determinante des durch (7.0.1), (7.0.2) gegebenen homogenen linearen Gleichungssystems für (p_τ, q_τ) verschwinden, dies steht aber im Widerspruch zur "Bedingung". Somit gilt $\frac{\partial}{\partial s} D(0,\tau) \neq 0$ ($\tau \in T$).

(b) Da T kompakt und $D(\cdot, \cdot)$ stetig ist, existiert ein $s_0 > 0$ mit

$$\left| \frac{\partial s}{\partial s} D(s, \tau) \right| > 0 \quad (0 \leq |s| < s_0, \tau \in T).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung muß also gelten (beachte: $D(0, \tau) = 0$):

$$D(s, \tau) \neq 0 \quad (0 < |s| < s_0, \tau \in T).$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen (hier: über die Umkehrfunktion) folgt (b).

(c) Zu zeigen ist nun, daß für die Funktion u in (*) $u_x = p$, $u_y = q$ gilt; $F(x, y, u, p, q) = 0$ gilt bereits nach Konstruktion. Die Argumentation ist wie im Beweis von Satz 1.5.4 (bzw. 1.6.1) und wird daher nur grob skizziert. Unter Verwendung der charakteristischen Differentialgleichungen zeigt man, daß $w := u_\tau - (px_\tau + qy_\tau)$ für festgehaltenes τ der gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{\partial w}{\partial s} = -F_u \cdot w$ genügt und somit wegen $w(0, \tau) = 0$ aus Eindeutigkeitsgründen die Nullfunktion sein muß. Außerdem ist $v := u_s - (px_s + qy_s) \equiv 0$. Diese beiden Bezeichnungen haben aufgrund der Kettenregel zu Folge, daß

$$u_x x_\tau + u_y y_\tau = u_\tau = px_\tau + qy_\tau, \quad u_x x_s + u_y y_s = u_s = px_s + qy_s$$

besteht, also ein homogenes lineares Gleichungssystem für $u_x - p$ und $u_y - q$, deren Determinante gleich $D(s, \tau)$ ist und somit auf $\{0 < |s| < s_0\} \times T$ nicht verschwindet. \square

Aufgabe 3 (6 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung $u = u(x, y, z)$ von

$$u_x^2 + u_y^2 - zu_z^2 = u, \quad u(x, y, 0) = x^2 + y^2$$

mit Hilfe des Grenzübergangs $\varepsilon \rightarrow 0$ als Grenzwert von u_ε aus

$$u_\varepsilon(x, y, \varepsilon) = x^2 + y^2.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 Wir schreiben das vorgelegte Problem als

$$\begin{aligned} F(x, y, z, u, p, q, r) &\equiv p^2 + q^2 - zr^2 - u = 0, \\ x_0(\tau_1, \tau_2) &= \tau_1, \quad y_0(\tau_1, \tau_2) = \tau_2, \quad z_0(\tau_1, \tau_2) = \varepsilon, \\ u_{\varepsilon, 0}(\tau_1, \tau_2) &= \tau_1^2 + \tau_2^2, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Der Anfangsstreifen ergibt sich aus folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} p_0^2(\tau_1, \tau_2) + q_0^2(\tau_1, \tau_2) - z_0(\tau_1, \tau_2) r_0^2(\tau_1, \tau_2) - u_{\varepsilon, 0}(\tau_1, \tau_2) &= 0, \\ p_0(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} + q_0(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_1} + r_0(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial z_0}{\partial \tau_1} &= \frac{\partial u_{\varepsilon, 0}}{\partial \tau_1}, \\ p_0(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial x_0}{\partial \tau_2} + q_0(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_2} + r_0(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial z_0}{\partial \tau_2} &= \frac{\partial u_{\varepsilon, 0}}{\partial \tau_2}. \end{aligned}$$

Damit gilt $p_0(\tau_1, \tau_2) = 2\tau_1$, $q_0(\tau_1, \tau_2) = 2\tau_2$ und über $4\tau_1^2 + 4\tau_2^2 - \varepsilon r_0^2(\tau_1, \tau_2) - \tau_1^2 - \tau_2^2 = 0$:

$$r_0(\tau_1, \tau_2) = \pm \sqrt{\frac{3(\tau_1^2 + \tau_2^2)}{\varepsilon}}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ fest; wir bezeichnen $u_0 := u_{\varepsilon,0}$. Die charakteristischen Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= 2P, & \frac{dY}{ds} &= 2Q, & \frac{dZ}{ds} &= -2ZR, \\ \frac{dU}{ds} &= P \cdot 2P - Q \cdot 2Q + R \cdot (-2ZR) = 2(P^2 + Q^2 - ZR^2) = 2U & (\text{wegen } F \equiv 0), \\ \frac{dP}{ds} &= P, & \frac{dQ}{ds} &= Q, & \frac{dR}{ds} &= -(R^2) - R(-1) = R^2 + R. \end{aligned}$$

Mit $X(0) = X_0, Y(0) = Y_0, \dots, R(0) = R_0$ ($\mathbf{c} = (X_0, \dots, R_0) \in \mathbb{R}^7$) erhalten wir sukzessive:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= 2U, \quad U(0) = U_0 \quad \Rightarrow \quad U(s, \mathbf{c}_0) = U_0 e^{2s}, \\ \frac{dP}{ds} &= P, \quad P(0) = P_0 \quad \Rightarrow \quad P(s, \mathbf{c}_0) = P_0 e^s; \quad \text{analog } Q(s, \mathbf{c}_0) = Q_0 e^s, \\ \frac{dR}{ds} &= R^2 + R, \quad R(0) = R_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{R_0}^{R(s)} \frac{d\sigma}{\sigma^2 + \sigma} = \int_0^s d\Upsilon \\ &\Rightarrow \quad R(s, \mathbf{c}_0) = \frac{R_0 e^s}{1 + R_0 - R_0 e^s}, \\ \frac{dX}{ds} &= 2P_0 e^s, \quad X(0) = X_0 \quad \Rightarrow \quad X(s, \mathbf{c}_0) = 2P_0 (e^s - 1) + X_0, \\ \frac{dY}{ds} &= 2Q_0 e^s, \quad Y(0) = Y_0 \quad \Rightarrow \quad Y(s, \mathbf{c}_0) = 2Q_0 (e^s - 1) + Y_0, \\ \frac{dZ}{ds} &= -2 \frac{\tilde{R}_0 e^s}{1 - \tilde{R}_0 e^s} Z(s), \quad \tilde{R}(0) = \frac{R_0}{1 + R_0}. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung $Z(0) = \varepsilon > 0$ folgt

$$\exists s_0 > 0 : \forall s \in [-s_0, s_0] : z(s) > 0,$$

somit gilt lokal

$$\frac{dZ}{Z} = 2 \frac{-\tilde{R}_0 e^s}{1 - \tilde{R}_0 e^s} ds \quad \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow \quad Z(s) = Z_0 (1 - R_0 (e^s - 1))^2.$$

Einsetzen in die Anfangsbedingung führt auf die Parameterdarstellung

$$x = X(s, \boldsymbol{\tau}) = \tau_1 + 4\tau_1 (e^s - 1), \quad (7.0.1)$$

$$y = Y(s, \boldsymbol{\tau}) = \tau_2 + 4\tau_2 (e^s - 1), \quad (7.0.2)$$

$$z = Z(s, \boldsymbol{\tau}) = \varepsilon \left(1 - \sqrt{3(\tau_1^2 + \tau_2^2) / \varepsilon} (e^s - 1) \right)^2, \quad (7.0.3)$$

$$u = U(s, \boldsymbol{\tau}) = (\tau_1^2 + \tau_2^2) e^{2s}. \quad (7.0.4)$$

Aus (7.0.3) folgt

$$e^s - 1 = \frac{1 - \sqrt{z/\varepsilon}}{\sqrt{3(\tau_1^2 + \tau_2^2)}/\varepsilon} =: \alpha.$$

Aus (7.0.4):

$$\tau_1 = \frac{x}{1 + 4\alpha},$$

aus (7.0.2):

$$\tau_2 = \frac{y}{1 + 4\alpha},$$

und daher

$$\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + 4\alpha} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{1 - \sqrt{z/\varepsilon}}{\sqrt{3(x^2 + y^2)}/\varepsilon} (1 + 4\alpha);$$

damit

$$\alpha = e^s - 1 = \frac{\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{z}}{\sqrt{3(x^2 + y^2)} - 4\sqrt{\varepsilon} + 4\sqrt{z}} \quad \text{und} \quad e^{2s} = \left(\frac{\sqrt{3(x^2 + y^2)} + 3(\sqrt{z} - \sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{3(x^2 + y^2)} + 4(\sqrt{z} - \sqrt{\varepsilon})} \right)^2.$$

Wir erhalten ferner

$$1 + 4\alpha = \frac{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}{\sqrt{3(x^2 + y^2)} - 4\sqrt{\varepsilon} + 4\sqrt{z}}$$

und schließlich

$$u(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + 4\alpha)^2} e^{2s} = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{3z} - \sqrt{3z} \right)^2 =: u_\varepsilon(x, y, z).$$

Man sieht sofort, daß u_ε Lösung des Anfangswertproblems

$$u_x^2 + u_y^2 - zu_z^2 = u, \quad u(x, y, \varepsilon) = x^2 + y^2$$

ist. Aus der stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Daten folgt

$$u(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + 3\sqrt{z} \right)^2.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Wir betrachten die Ausbreitung von Licht in der x - y -Ebene. Es gebe eine Funktion $u(x, y)$ derart, daß die Position der Wellenfront zum Zeitpunkt t durch die Höhenlinie $u(x, y) = t$ gegeben ist. Ist $c(x, y)$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit an (x, y) , dann heißt die Kurve $(x(t), y(t))$ *Lichtstrahl*, wenn ihre Geschwindigkeit an jedem Punkt mit $c(x, y)$ übereinstimmt und ihre Richtung orthogonal zur Wellenfront ist.

a) Zeigen Sie, daß u die *zweidimensionale Eikonalgleichung der geometrischen Optik*

$$c^2(u_x^2 + u_y^2) = 1 \tag{7.0.1}$$

erfüllt.

b) Wir wählen $c = \text{const.}$ und betrachten

$$F(x, y, z, p, q) = \frac{1}{2}(c^2 p^2 + c^2 q^2 - 1).$$

Beschreiben Sie den zugehörigen Mongeschen Kegel und lösen Sie die charakteristischen Gleichungen.

c) Welche Interpretation hat der entlang der Charakteristik variierende Parameter, und welche Bezeichnung legt sie für die Charakteristiken bzw. für den Mongeschen Kegel nahe?

d) Wir betrachten das Cauchy-Problem mit einer parametrisierten Anfangskurve

$$\Gamma: \quad x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s)$$

und setzen Γ auf einen Streifen durch Funktionen ϕ und ψ fort, so daß gilt:

$$c^2(\phi^2(s) + \psi^2(s)) = 1, \quad h'(s) = \phi(s)f'(s) + \psi(s)g'(s). \quad (7.0.2)$$

Wann ist (7.0.2) lösbar, und welche Lage hat Γ dann in bezug auf den Mongeschen Kegel?

e) Geben Sie die allgemeine Lösung des Cauchy-Problems für den Fall $h \equiv 0$ an, sowie die spezielle Lösung für $f(s) = \cos s$ und $g(s) = \sin s$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

a) Die in der Aufgabenstellung genannten Bedingungen führen mit $\dot{} \equiv d \cdot / dt$ auf

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = c(x, y), \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \text{ und } \nabla u \text{ sind kollinear.} \quad (*)$$

Differentiation von $u(x(t), y(t)) = t$ liefert

$$\nabla u \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = 1; \quad \text{mit } \nabla u = \lambda \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \text{ folgt } \lambda = \frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{1}{c^2}$$

und daher

$$\nabla u \cdot (c^2 \nabla u) = 1, \quad \text{also } c^2 (u_x^2 + u_y^2) = 1.$$

b) Die charakteristischen Gleichungen lauten

$$\frac{dx}{dt} = c^2 p, \quad \frac{dy}{dt} = c^2 q, \quad \frac{dz}{dt} = c^2 p^2 + c^2 q^2 = 1, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0.$$

t ist der Parameter entlang der Charakteristik. Beachte, daß p und q entlang der Charakteristik konstant sind. Für Anfangswerte $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ mit $c^2(p_0^2 + q_0^2) = 1$ ist die Charakteristik der Gerade

$$x = c^2 p_0 t + x_0, \quad y = c^2 q_0 t + y_0, \quad z = t + z_0,$$

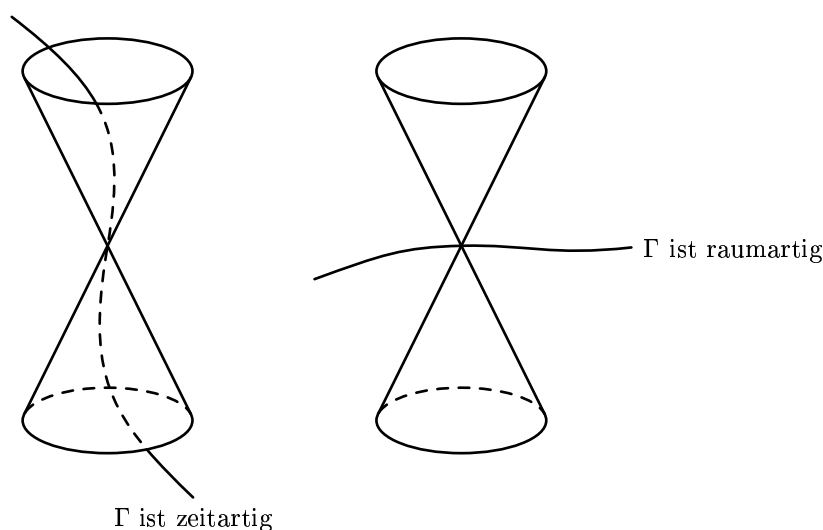
welche auf dem Mongeschen Kegel liegen. Die Bezeichnung $c^2(p^2 + q^2) = 1$ zeigt, daß dieser ein Kreiskegel ist, der einen Winkel $\theta = \arctan c$ mit der z -Achse bildet.

c) Man kann t als Zeit, gemessen von einer Anfangszeit z_0 an interpretieren. Ferner erfüllt $(x(t), y(t))$ die Bedingung (*) für einen Lichtstrahl, somit sind die Charakteristiken gerade die Lichtstrahlen und der Mongesche Kegel im Lichtkegel.

d) Das System (7.0.2) hat

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{keine} \\ \text{genau eine} \\ \text{zwei} \end{array} \right\} \text{ Lösungen, falls } \left\{ \begin{array}{l} (f'(s))^2 + (g'(s))^2 < c^2(h'(s))^2 \quad (1) \\ (f'(s))^2 + (g'(s))^2 = c^2(h'(s))^2 \quad (2) \\ (f'(s))^2 + (g'(s))^2 > c^2(h'(s))^2 \quad (3) \end{array} \right\} \text{ gilt}$$

(geometrisches Argument: (7.0.2.1) bezeichnet einen Kreis mit Radius $1/c$ in der ϕ - ψ -Ebene; (7.0.2.2) eine Gerade mit Abstand $\frac{h'}{\sqrt{f'+g'}}$ vom Nullpunkt). Im 1. Fall bzw. im 3. Fall gilt



e) Der Fall $h \equiv 0$ bedeutet, daß Γ in der x - y -Ebene liegt und raumartig ist. Sind die Funktionen ϕ und ψ bestimmt, so können sie als Anfangbedingungen in der Lösung der charakteristischen Gleichungen verwendet werden. Dies liefert

$$x = c^2\phi(s)t + f(s), \quad y = c^2\psi(s)t + g(s), \quad z = t, \quad p = \phi(s), \quad q = \psi(s).$$

Können s und t als Funktionen von x und y dargestellt werden, so liefert dies die Lösung. Mit $\Gamma = \{x = \cos s, y = \sin s, z = 0\}$ muß ein Paar Funktionen (ϕ, ψ) bestimmt werden, für das gilt:

$$c^2(\phi^2(s) + \psi^2(s)) = 1, \quad \phi(s)(-\sin s) + \psi(s)\cos s = 0.$$

Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} \phi(s) \\ \psi(s) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}$$

und damit $x = \cos s(1 \pm ct)$, $y = \sin s(1 \pm ct)$, also

$$x^2 + y^2 = (1 \pm ct)^2.$$

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (6 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung des Cauchy-Problems

$$\sqrt{u_x} + \sqrt{u_y} - 2e^u = 0, \quad u(x, -x) = 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 Mit $p := u_x$, $q := u_y$ folgt $F(x, y, u, p, q) = \sqrt{p} + \sqrt{q} - 2e^u$. Wir betrachten die parametrisierte Anfangskurve

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_0(\tau) = \tau, \quad y_0(\tau) = -\tau, \quad u_0(\tau) = 0) \mid \tau \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Komponenten $(p_0(\tau), q_0(\tau))$ des Anfangsstreifens \mathcal{S} sind gegeben durch

$$\begin{aligned} F(x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)) &= 0, \\ p_0(\tau) \frac{dx_0}{d\tau} + q_0(\tau) \frac{dy_0}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Aus

$$\sqrt{p_0(\tau)} + \sqrt{q_0(\tau)} - 2e^{u_0(\tau)} = 0, \quad p_0(\tau) \cdot 1 + q_0(\tau) \cdot (-1) = 0$$

folgt

$$\sqrt{p_0(\tau)} + \sqrt{q_0(\tau)} = 2, \quad p_0(\tau) = q_0(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

also $p_0 \equiv 1$, $q_0 \equiv 1$ und damit

$$\mathcal{S} : \left\{ (x_0(\tau) = \tau, \quad y_0(\tau) = -\tau, \quad u_0(\tau) = 0, \quad p_0(\tau) = 1, \quad q_0(\tau) = 1) \mid \tau \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Anfangsstreifen ist nicht-charakteristisch, denn es gilt

$$\left| \begin{array}{cc} F_p|_{\mathcal{S}} & F_q|_{\mathcal{S}} \\ \frac{dx_0}{d\tau} & \frac{dy_0}{d\tau} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2\sqrt{p_0(\tau)}} & \frac{1}{2\sqrt{q_0(\tau)}} \\ 1 & -1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Somit existiert lokal eine stetig differenzierbare Lösung $u = u(x, y)$. Das System der charakteristischen Differentialgleichungen lautet

$$\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= \frac{1}{2\sqrt{P}}, & \frac{dY}{ds} &= \frac{1}{2\sqrt{Q}}, \\ \frac{dU}{ds} &= P \cdot \frac{1}{2\sqrt{P}} + Q \cdot \frac{1}{2\sqrt{Q}} = \frac{1}{2} \cdot 2e^U = e^U, \\ \frac{dP}{ds} &= -F_x - PF_u = -P \cdot (-2e^U) = 2Pe^U, & \frac{dQ}{ds} &= 2Qe^U. \end{aligned}$$

Aus $\frac{dU}{ds} = e^U$, $U(s_0) = U_0$ folgt

$$U(s) = \ln \frac{1}{e^{-U_0} + s_0 - s} \quad (s < e^{-U_0} + s_0 = 1).$$

Zur Diskussion der Gleichung $\frac{dP}{ds} = 2Pe^U$ unterscheiden wir zwei Fälle.

- a) Ist $P \equiv 0$, dann $\frac{\partial U}{\partial x} \equiv 0$ und somit $u(x, y) = \varphi(y)$. Aus der Differentialgleichung folgt $\sqrt{\varphi(y)'} - 2e^{\varphi(y)} = 0$, also $\varphi'(y) = 4e^{2\varphi(y)}$ oder $-\frac{1}{2} e^{-2\varphi(y)} \cdot (-2\varphi'(y)) = 4$ und somit

$$\varphi(y) = \ln \left(\frac{1}{e^{-2y_0} + 8y_0 - 8y} \right)^2 = -2 \ln (e^{-2y_0} + 8y_0 - 8y).$$

Aus der Anfangsbedingung $0 = u(x, -x) = \varphi(-x)$ folgt aber $\varphi \equiv 0$, ein Widerspruch.

- b) Andererseits gilt

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{ds} = \frac{2}{e^{-U_0} + s_0 - s}$$

und damit

$$\ln \frac{P(s)}{P_0} = -2 \ln (e^{-U_0} + s_0 - s) \Big|_{s_0}^s \Rightarrow P(s) = \frac{P_0 e^{-2U_0}}{(e^{-U_0} + s_0 - s)^2}.$$

Analog folgt

$$Q(s) = \frac{Q_0 e^{-2U_0}}{(e^{-U_0} + s_0 - s)^2}.$$

Mit

$$\frac{dX}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{P(s)}} = \frac{1}{2\sqrt{P_0} \frac{e^{-U_0}}{e^{-U_0} + s_0 - s}} = \frac{e^{-U_0} + s_0 - s}{2\sqrt{P_0} e^{-U_0}}$$

und $X(s_0) = X_0$ folgt

$$X(s) = X_0 + \frac{(e^{-U_0} + s_0) s - \frac{s^2}{2}}{2\sqrt{P_0} e^{-U_0}},$$

analog

$$Y(s) = Y_0 + \frac{(e^{-U_0} + s_0) s - \frac{s^2}{2}}{2\sqrt{Q_0} e^{-U_0}}.$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen folgt

$$x = X(s, \tau) = \tau + \frac{s - \frac{s^2}{2}}{2}, \quad y = Y(s, \tau) = -\tau + \frac{s - \frac{s^2}{2}}{2},$$

$$u = U(s, \tau) = \ln \frac{1}{1-s} \quad (s < 1),$$

$$p = P(s, \tau) = \ln \frac{1}{(1-s)^2}, \quad q = Q(s, \tau) = \ln \frac{1}{(1-s)^2}.$$

Damit folgt

$$x + y = s - \frac{s^2}{2}; \quad \frac{s^2}{2} s - s + x + y = 0 \Leftrightarrow s^2 - 2s + 2(x + y) = 0;$$

diese Gleichung hat zwei Lösungen $s_1 + s_2 = 1$; wir wählen $s < 1$ und erhalten $s = 1 - \sqrt{1 - 2(x + y)}$, $x + y \leq \frac{1}{2}$, und daher

$$u = u(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2(x + y)}}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte) Wir betrachten die Clairautsche Differentialgleichung

$$F(x,y,u,p,q) \equiv xp + yq + f(p,q) - u = 0 \quad (7.0.1)$$

für eine gegebene Funktion f .

a) Zeigen Sie, daß die zweiparametrische Ebenenfamilie

$$u = ax + by + f(a,b) \quad (7.0.2)$$

ein vollständiges Integral von (7.0.1) ist.

b) Berechnen Sie für

$$f(a,b) = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad (7.0.3)$$

das singuläre Integral von (7.0.1) und interpretieren Sie dieses Resultat geometrisch.

c) Berechnen Sie die charakteristischen Streifen von (7.0.1) und diskutieren Sie, wie diese aus dem vollständigen Integral gebildet werden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

a) Mit $\varphi_x = a$, $\varphi_y = b$ folgt

$$\begin{aligned} & F(x,y,\varphi(x,y,a,b),\varphi_x(x,y,a,b),\varphi_y(x,y,a,b)) \\ &= x\varphi_x + y\varphi_y + f(\varphi_x,\varphi_y) - u \\ &= x \cdot a + y \cdot b + f(a,b) - (ax + by + f(a,b)) = 0; \end{aligned}$$

ferner gilt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \varphi_a & \varphi_{ax} & \varphi_{ay} \\ \varphi_b & \varphi_{bx} & \varphi_{by} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} x + f_a & 1 & 0 \\ y + f_b & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

b) Das singuläre Gebilde ist charakterisiert durch die Gleichungen

$$F_p = 0, \quad F_q = 0, \quad F = 0,$$

also

$$x + f_a(a,b) = 0, \quad y + f_b(a,b) = 0, \quad z = ax + by + f(a,b). \quad (*)$$

Diese Gleichungen legen eine singuläre Lösung fest, falls die Auflösbarkeitsbedingungen (vergl. (1.7.2))

$$F_u \neq 0, \quad \det \left(\frac{\partial(f_a, f_b)}{\partial(a, b)} \right) \neq 0$$

gilt. Die erste Bedingung ist bei einer Clairautschen Differentialgleichung trivialerweise erfüllt; die zweite wegen

$$\begin{vmatrix} f_{aa} & f_{ab} \\ f_{ba} & f_{bb} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

ebenfalls (bei unserem Beispiel). Aus (*) folgt für die singuläre Lösung $x = a$, $y = b$, und damit

$$\tilde{u}(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (**)$$

Wir betrachten die Tangentialebenen an die durch (**) beschriebene Fläche. Mit Parametern \tilde{u}, \tilde{v} gilt

$$\begin{aligned} T: z &= (x - \tilde{u}) \cdot u_x(\tilde{u}, \tilde{v}) + (y - \tilde{v}) \cdot u_y(\tilde{u}, \tilde{v}) + u(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ &= (x - \tilde{u}) \cdot \tilde{u} + (y - \tilde{v}) \cdot \tilde{v} + \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \\ &= \tilde{u}x - \tilde{u}^2 + \tilde{v}y - \tilde{v}^2 + \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \\ &= \tilde{u}x + \tilde{v}y - \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) = \tilde{u}x + \tilde{v}y + f(\tilde{u}, \tilde{v}). \end{aligned}$$

Das heißt: die durch das vollständige Integral (*) gegebene Ebenenschar beschreibt gerade die Tangentialflächen an das singuläre Integral.

- c) Für die vorgelegte Differentialgleichung lauten die charakteristischen Differentialgleichungen

$$\frac{dX}{ds} = F_p = x + f_p(p, q), \quad (7.0.4)$$

$$\frac{dY}{ds} = F_q = y + f_q(p, q), \quad (7.0.5)$$

$$\frac{dU}{ds} = pF_p + qF_q = p(x + f_p) + q(y + f_q), \quad (7.0.6)$$

$$\frac{dP}{ds} = -F_x - PF_u = -p - (-1)p = 0,$$

$$\frac{dQ}{ds} = -F_y - QF_u = -q - (-1)q = 0.$$

Es gilt also $p = p_0(\tau)$, $q = q_0(\tau)$. Aus (7.0.4) folgt

$$X(s; \tau) = x_0(\tau) e^s + f_p(p_0(\tau), q_0(\tau)) \cdot s,$$

$$Y(s; \tau) = y_0(\tau) e^s + f_q(p_0(\tau), q_0(\tau)) \cdot s;$$

aus (7.0.4) folgt

$$\frac{dU}{ds} = p_0(\tau) \left(x + f_p(p_0(\tau), q_0(\tau)) \right) + q_0(\tau) \left(x + f_q(p_0(\tau), q_0(\tau)) \right)$$

und damit

$$\begin{aligned} U &= u_0(\tau) + p_0(\tau) \left(x_0(\tau) e^s + \frac{1}{2} f_p(p_0(\tau), q_0(\tau)) s^2 + f_p(p_0(\tau), q_0(\tau)) s \right) \\ &\quad + q_0(\tau) \left(y_0(\tau) e^s + \frac{1}{2} f_q(p_0(\tau), q_0(\tau)) s^2 + f_q(p_0(\tau), q_0(\tau)) s \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) Bestimmen Sie zur Differentialgleichung

$$F(x,y,u,p,q) \equiv xp + yq + p^2 + q^2 - u = 0 \quad (7.0.1)$$

ein vollständiges Integral, die singulären Lösungen und alle Lösungen durch

$$u(x,0) = -x^2/4.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 Offenbar ist $F = 0$ Clairautsch.

a) Ein vollständiges Integral ist gegeben durch

$$\varphi(x,y,a,b) = ax + by + a^2 + b^2, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Nachweis: es gilt $\varphi_x = a$, $\varphi_y = b$;

$$\begin{aligned} & F(x,y,\varphi(x,y,a,b),\varphi_x(x,y,a,b),\varphi_y(x,y,a,b)) \\ &= ax + by + a^2 + b^2 - (ax + by + a^2 + b^2) = 0; \\ \text{rang} \begin{bmatrix} \varphi_a & \varphi_{ax} & \varphi_{ay} \\ \varphi_b & \varphi_{bx} & \varphi_{by} \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} x + 2a & 1 & 0 \\ y + 2b & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2. \end{aligned}$$

b) Das singuläre Gebilde der Differentialgleichung ist die Punktmenge

$$\{(x,y,u,p,q) \in \mathbb{R}^5 \mid F_p = x + 2p = 0, \quad F_q = y + 2q = 0; \quad F = 0\}.$$

Ihre Projektion in den x - y - u -Raum bestimmt sich durch Elimination von p und q aus den drei oben genannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{x}{2}; \quad q = -\frac{y}{2}; \\ \tilde{u}(x,y) &= xp + yq + p^2 + q^2 = x \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) + y \cdot \left(-\frac{y}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{2}\right)^2; \\ \tilde{u}(x,y) &= -\frac{x^2 + y^2}{4}. \end{aligned}$$

Durch Nachrechnen verifiziert man, daß die Funktion $(x,y) \mapsto \tilde{u}(x,y)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, die "singuläre Lösung". Zu bemerken ist, daß die singuläre Lösung die Anfangsbedingung $u(x,0) = -x^2/4$ erfüllt.

c) Eine weitere Lösung erhält man durch Enveloppenbildung. Sei

$$\tau \mapsto (x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau))$$

ein Anfangsstreifen zu dem vorliegenden Cauchy-Problem, dann gilt

$$x_0(\tau) = \tau, \quad y_0(\tau) = 0, \quad u_0(\tau) = -\frac{1}{4}\tau^2. \quad (*)$$

Wir suchen nach einer Enveloppe, für die dieser Streifen als Berührstreifen zwischen der Enveloppe und einer Lösungsfläche aus der Schar $\varphi(\cdot, \cdot, a, b)$ auftritt, d.h.

$$p_0(\tau) = \varphi_x(x_0(\tau), y_0(\tau), a, b) \equiv a, \quad q_0(\tau) = \varphi_y(x_0(\tau), y_0(\tau), a, b) \equiv b$$

(a, b geeignet!). Damit schreiben sich die in (*) fehlenden Bedingungen für einen Anfangsstreifen:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\tau = \dot{u}_0(\tau) &= (p_0 \underbrace{\dot{x}_0}_{=1} + q_0 \underbrace{\dot{y}_0}_{=0})(\tau) = p_0(\tau) = a \\ 0 &= F(\underbrace{x_0(\tau)}_{=\tau}, \underbrace{y_0(\tau)}_{=0}, \underbrace{u_0(\tau)}_{=-\frac{1}{4}\tau^2}, \underbrace{p_0(\tau)}_{=a}, \underbrace{q_0(\tau)}_{=b}) \\ &= \tau \cdot a + a^2 + b^2 + \frac{\tau^2}{4}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$a = -\frac{\tau}{2}, \quad \tau \left(-\frac{\tau}{2}\right) + \frac{\tau^2}{4} + b^2 + \frac{\tau^2}{4} = 0 = b = 0.$$

τ läßt sich aus der Enveloppenbedingung berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\varphi(x, y, a(\tau), b(\tau)) &= 0, \quad \text{d.h.} \\ \frac{d\varphi}{da} \cdot \frac{da}{d\tau} + \frac{d\varphi}{db} \cdot \frac{db}{d\tau} &= (x + 2a) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (y + 2b(\tau)) \cdot 0 \\ &= -\frac{x}{2} + (-\tau) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{x}{2} + \frac{\tau}{2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = x. \end{aligned}$$

Damit lautet die Enveloppenlösung

$$\begin{aligned} u(x, y) &:= \varphi\left(x, y, a(\tau(x, y)), b(\tau(x, y))\right) = \varphi(x, y, -x/2, 0) \\ &= \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot x + 0 \cdot y + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Arbeiten Sie den Beweis von Satz 1.6.2 aus.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4 Siehe Vorlesungsskript.

Aufgabe 5 (6 Punkte) Vorgelegt sei die Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0; \quad f(u) = u(1 - u) \quad (7.0.1)$$

zusammen mit dem Anfangsdatum

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{für } x \leq 0, \\ u_R & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Riemann-Problem}). \quad (7.0.2)$$

a) Untersuchen Sie, für welche u_L, u_R das Riemann-Problem eine stetige Lösung $u(x,t) = w(x/t)$ hat, und geben Sie diese an.

b) Untersuchen Sie ebenso die Existenz stetiger Lösungen für $f(u) = u(1-u)^2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5 Wir betrachten das Problem zunächst für eine "allgemeine" Flußfunktion f . Mit $u(x,t) = w(x/t)$ folgt aus der Erhaltungsgleichung (und mit $z := x/t$)

$$-\frac{x}{t^2} w'(z) + \frac{1}{t} f'(w) w'(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{t} \left(-\frac{x}{t} + f'(w) \right) w' = 0,$$

also

$$z = \frac{x}{t} = f'(w).$$

Damit das Riemann-Problem eine stetige Lösung hat, muß f' zwischen u_L und u_R streng monoton sein. Das heißt, es muß gelten:

$$\begin{aligned} u_L < u_R &\Rightarrow f''(u) > 0 \text{ für } u \text{ zwischen } u_L \text{ und } u_R, \\ u_L > u_R &\Rightarrow f''(u) < 0 \text{ für } u \text{ zwischen } u_R \text{ und } u_L. \end{aligned}$$

(Die anderen Fälle führen auf unstetige Lösungen, die in der Vorlesung im Anschluß behandelt werden.)

a) Für $f(u) = u(1-u) = u - u^2$ gilt $f'' \equiv -2$. Folglich hat das Riemann-Problem genau dann eine stetige Lösung, wenn $u_L > u_R$ gilt. Die Lösung ist gegeben durch

$$u(x,t) = w(z) = \begin{cases} u_L & \text{für } x \leq f'(u_L)t, \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{für } f'(u_L)t \leq x \leq f'(u_R)t, \\ u_R & \text{für } x \geq f'(u_R)t. \end{cases}$$

Hierbei ist $(f')^{-1}$ die Umkehrfunktion der Ableitung, also mit $f'(u) = -2u$:

$$(f')^{-1}(z) = -\frac{1}{2}z.$$

b) Es gilt $f(u) = u - 2u^2 + u^3$, $f'(u) = 1 - 4u + 3u^2$, $f''(u) = -4 + 6u$. Folglich gilt

$$f''(u) \begin{cases} < 0 & \text{für } u < u_{\text{infl}} = \frac{2}{3}, \\ > 0 & \text{für } u > u_{\text{infl}} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Damit hat das Riemann-Problem genau dann eine stetige Lösung, wenn $u_R < u_L \leq \frac{2}{3}$ oder $u_R > u_L \geq \frac{2}{3}$ gilt.

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte) Vorgelegt sei die Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0; \quad f(u) = u(1 - u) \quad (7.0.1)$$

zusammen mit dem Anfangsdatum

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{für } x \leq 0, \\ u_R & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Riemann-Problem}). \quad (7.0.2)$$

a) Untersuchen Sie, für welche u_L, u_R das Riemann-Problem eine stetige Lösung $u(x,t) = w(x/t)$ hat, und geben Sie diese an.

b) Untersuchen Sie ebenso die Existenz stetiger Lösungen für $f(u) = u(1 - u)^2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 Setzen wir $u(x,t) = w(x/t)$, dann gelten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t} w' \left(\frac{x}{t} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} w' \left(\frac{x}{t} \right)$$

und die Erhaltungsgleichung geht in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left(-\frac{x}{t^2} + \frac{1}{t} f'(w(x/t)) \right) \cdot w' \left(\frac{x}{t} \right) = 0$$

für w über. Eine Lösung ist offenbar $w = \text{const.}$, welche jedoch nicht in Einklang mit den Anfangsdaten steht. Andernfalls gilt für $w(x,t)$ die Gleichung

$$f'(w(x/t)) = \frac{x}{t}$$

bzw. mit $\xi = x/t$

$$f'(w(\xi)) = \xi,$$

aus der die Lösung $w = (f')^{-1}(\xi)$ bestimmt werden kann, falls f' im Intervall $[\min\{u_L, u_R\}, \max\{u_L, u_R\}]$ monoton ist mit $f'(u_L) < f'(u_R)$, d.h. f' muß in diesem Intervall streng monoton wachsend sein. Die Lösung des Riemann-Problems lautet dann

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{für } \frac{x}{t} < f'(u_L), \\ (f')^{-1} \left(\frac{x}{t} \right) & \text{für } f'(u_L) < \frac{x}{t} < f'(u_R), \\ u_R & \text{für } \frac{x}{t} > f'(u_R). \end{cases} \quad (*)$$

(a) Für $f(u) = u(1 - u) = u - u^2$ ist $f'(u) = 1 - 2u$. Diese Funktion ist streng monoton fallend. Also kann die Lösung in der Form (*) genau dann angegeben werden, wenn $u_L > u_R$ ist. Algebraisch ist $(f')^{-1} \left(\frac{x}{t} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{t} \right)$.

- (b) Es gilt $f'(u) = (1-u)(1-3u)$, $f''(u) = 6u - 4$. Die Funktion $f(u)$ hat folglich ein Maximum an $u_1 := \frac{1}{3}$ und einen Wendepunkt an $u_2 := \frac{2}{3}$. Die Auflösung der Gleichung $f'(u) = \xi$ nach u liefert:

$$\begin{aligned} 1 - 4u + 3u^2 = \xi &\Leftrightarrow 3u^2 - 4u = \xi - 1 \\ \Leftrightarrow u^2 - \frac{4}{3}u + \frac{4}{9} = \frac{\xi - 1}{3} + \frac{4}{9} &\Leftrightarrow \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{\xi}{3} + \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow u_{\text{I}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3\xi + 1}, \quad u_{\text{II}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3\xi + 1}. \end{aligned}$$

Folglich kann die Lösung konstuiert werden, wenn gilt:

- (a) Auf dem Intervall $(-\infty, u_2)$ gilt $f''(u) < 0$ und f' ist monoton fallend. Also gilt dann (*) für $u_R < u_L \leq \frac{2}{3}$. Der zu verwendende Ast ist u_{II} . Diese Umkehrfunktion ist wohl definiert, da der Radikand nur für $\xi \leq -\frac{1}{3}$ negativ wird. Es gilt aber

$$f'(u) \geq f'(u_2) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - 3 \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot (-1) = -\frac{1}{3}.$$

Also kann die Lösung stets in der Form (*) angegeben werden.

- (b) Analog ist $f''(u) > 0$ auf (u_2, ∞) und (*) ist für $u_R > u_L \geq \frac{2}{3}$ wohl definiert.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Zeigen Sie, daß die Oleiniksche Entropiebedingung genau dann erfüllt ist, wenn die die Punkte $(u_\ell, Q(u_\ell))$ und $(u_r, Q(u_r))$ verbindende Sekante für $u_\ell < u_r$ ganz unterhalb bzw. für $u_\ell > u_r$ ganz oberhalb des Graphen von $Q(u)$ verläuft.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 Wir betrachten den Fall $u_r < u_\ell$ und nehmen die zweite Ungleichung,

$$\frac{Q(u_r) - Q(u_\ell)}{u_r - u_\ell} \geq \frac{Q(u) - Q(u_r)}{u - u_r}, \quad \boxplus$$

die wir wegen $u - u_r > 0$ auch schreiben können als

$$Q(u) \leq Q(u_r) + (u - u_r) \frac{Q(u_r) - Q(u_\ell)}{u_r - u_\ell}. \quad (*)$$

Wähle nun

$$\alpha = \frac{u - u_\ell}{u_r - u_\ell} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Dann gilt $u = \alpha u_r + (1 - \alpha) u_\ell$ und somit folgt aus (*)

$$Q(\alpha u_r + (1 - \alpha) u_\ell) \leq \alpha Q(u_r) + (1 - \alpha) Q(u_\ell). \quad (**)$$

Damit gilt \boxplus genau dann, wenn (**) gilt. Betrachte nun die Ungleichung

$$\frac{Q(u) - Q(u_\ell)}{u - u_\ell} \geq \frac{Q(u_r) - Q(u_\ell)}{u_r - u_\ell} \quad (***)$$

Wegen $u - u_\ell < 0$ folgt

$$Q(u) \leq Q(u_\ell) + (u - u_\ell) \frac{Q(u_r) - Q(u_\ell)}{u_r - u_\ell}.$$

Wählen wir α wie oben, so folgt, daß (***) genau dann gilt, wenn (**) erfüllt ist. Diese Ungleichung zeigt, daß der Graph von $Q(u)$ unter der Sekante liegt, die $(u_\ell, Q(u_\ell))$ und $(u_r, Q(u_r))$ verbindet. Der Fall $u_r > u_\ell$ kann analog behandelt werden.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Sei z eine unstetige, stückweise differenzierbare schwache Lösung der Erhaltungsgleichung $u_t + q(u)_x = 0$ mit einer strikt konvexen Flußfunktion Q und einer glatten Stoßfront Σ . Zeigen Sie: Gilt die Entropiebedingung (1.10.9) aus der Vorlesung für *ein* Entropiepaar (η, ψ) , so gilt sie für *alle* Entropiepaare (η, ψ) . Die Entropiebedingung (1.10.9) ist genau dann erfüllt, wenn die Laxsche Entropiebedingung $u_l > u_r$ erfüllt ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 Sind η eine Entropiefunktion und ψ ein Entropiefluß, d.h. ist (η, ψ) ein Entropiepaar, so gilt $\eta'' > 0$ und $\psi' = \eta' Q'$; und die Entropiebedingung lautet:

$$\frac{d\Sigma}{d\tau} (\eta(u_\ell) - \eta(u_r)) \leq \psi(u_\ell) - \psi(u_r) \quad \text{für alle Entropiepaare } (\eta, \psi). \quad (*)$$

Mit der Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$\frac{d\Sigma}{d\tau} = \frac{Q(u_r) - Q(u_\ell)}{u_r - u_\ell}$$

folgt, daß (*) zur Ungleichung

$$\frac{Q(u_r) - Q(u_\ell)}{u_r - u_\ell} (\eta(u_r) - \eta(u_\ell)) - (\psi(u_r) - \psi(u_\ell)) \geq 0 \quad \text{für alle Entropiepaare } (\eta, \psi) \quad (**)$$

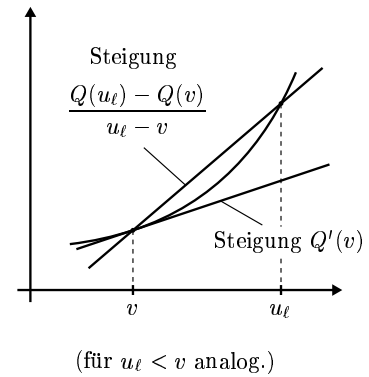
äquivalent ist. Wir definieren die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h(v) := \frac{Q(v) - Q(u_\ell)}{v - u_\ell} (\eta(v) - \eta(u_\ell)) - (\psi(v) - \psi(u_\ell)).$$

Offensichtlich gilt (**) genau dann, wenn $h(u_r) \geq 0$ ist. Nun gilt

$$\begin{aligned} h'(v) &= \frac{Q'(v)(v - u_\ell) - (Q(v) - Q(u_\ell))}{(v - u_\ell)^2} (\psi(v) - \psi(u_\ell)) + \frac{Q(v) - Q(u_\ell)}{v - u_\ell} \underbrace{\eta'(v) - \psi'(v)}_{= \eta'(v) Q'(v)} \\ &= - \left\{ \frac{(Q(v) - Q(u_\ell) - Q'(v)(v - u_\ell)) (\eta(v) - \eta(u_\ell))}{(v - u_\ell)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(Q(u_\ell) - Q(v)) \eta'(v) (v - u_\ell)}{(v - u_\ell)^2} + \frac{\eta'(v) Q'(v) (u_\ell - v)^2}{(v - u_\ell)^2} \right\} \\ &= - \left\{ \frac{(Q(u_\ell) - Q(v) - Q'(v)(u_\ell - v)) (\eta(u_\ell) - \eta(v))}{(v - u_\ell)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(Q(u_\ell) - Q(v)) \cdot (-\eta'(v)(u_\ell - v))}{(v - u_\ell)^2} + \frac{(-Q'(v)(u_\ell - v)) (-\eta'(v)(u_\ell - v)^2)}{(v - u_\ell)^2} \right\} \\ &= - \frac{(Q(u_\ell) - Q(v) - Q'(v)(u_\ell - v)) (\eta(u_\ell) - \eta(v) - \eta'(v)(u_\ell - v))}{(v - u_\ell)^2}. \end{aligned}$$

Gilt $Q'' > 0$, so ist $Q(u_\ell) - Q(v) - Q'(v)(u_\ell - v) > 0$ für alle $v \neq u_\ell$. Zum Beweis machen wir und klar, daß die Ungleichung auch als $Q'(v)(u_\ell - v) < Q(u_\ell) - Q(v)$ geschrieben werden kann. Aus $\eta'' > 0$ folgt $\eta(u_\ell) - \eta(v) - \eta'(u_\ell - v) > 0$ für alle $v \neq u_\ell$. Daraus folgt $h'(v) < 0$. Mit $h(u_\ell) = 0$ gilt $h(u_r) > 0$ genau dann, wenn $u_r < u_\ell$. $h(u_r) > 0$ ist aber äquivalent zu (1.10.9), und diese Ungleichung gilt genau dann, wenn u eine Entropielösung ist. Gilt (1.10.9) für ein Entropiepaar, so gilt $u_r < u_\ell$, und damit gilt (1.10.9) für alle Entropiepaare, denn der Beweis ist von (η, ψ) unabhängig.



Aufgabe 4 (6 Punkte) Beweisen Sie Lemma 1.10.8 der Vorlesung.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4 Wir verweisen auf den Beweis von Korollar 1.11.8 im Skript.

Aufgabe 5 (6 Punkte) Ermitteln Sie alle Entropielösungen des Riemann-Problems

$$u_t + Q(u)_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0; \quad u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{für } x < 0, \\ u_R & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

für die Flußfunktion

$$Q(u) = \begin{cases} (u + 1/2)^2 - 1/4 & \text{für } u \leq 0, \\ -(u - 1/2)^2 + 1/4 & \text{für } u > 0 \end{cases} \quad (7.0.1)$$

(siehe Abb. 7.1) mit

a) $u_L = -2$,

b) $u_R = 1$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5

a) Wir halten $u_L = -2$ fest und ermitteln diejenigen Zustände u_R , für die die Oleiniksche Entropiebedingung erfüllt ist. Nach Aufgabe 2 sind das diejenigen u_R für die gilt:

- (1) $u_R > u_L$ und die Sekante zwischen $(u_L, Q(u_L))$ und $(u_R, Q(u_R))$ verläuft ganz unterhalb des Graphen von $Q(u)$,
- (2) $u_R < u_L$ und die Sekante zwischen $(u_R, Q(u_R))$ und $(u_L, Q(u_L))$ verläuft ganz oberhalb des Graphen von $Q(u)$.

Wir lassen nun u_R von $-\infty$ bis ∞ wandern und diskutieren die verschiedenen Lagen.

$u_R < u_L$. Hier ist die Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$\sigma = \frac{Q(u_R) - Q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{u_R^2 + u_R - 2}{u_R + 2},$$

die Oleiniksche Entropiebedingung ist immer erfüllt und es gilt

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{für } x < \sigma t, \\ u_R & \text{für } x > \sigma t. \end{cases}$$

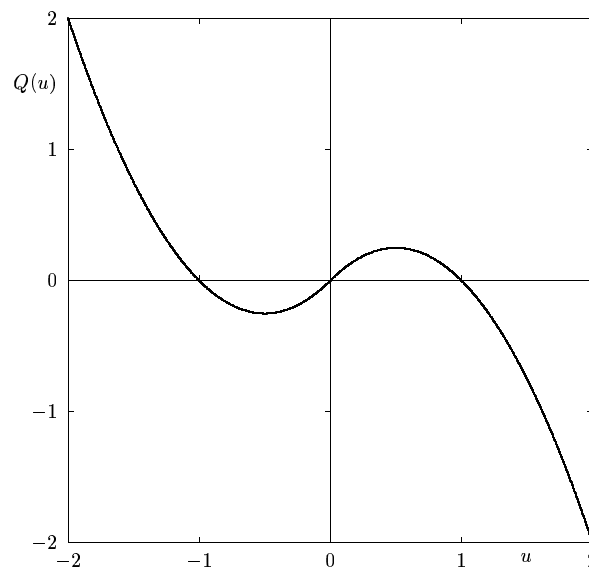


Abbildung 7.1 Die Flußfunktion $Q(u)$.

$u_L < u_R < 0$. Die Sekante verläuft immer oberhalb des Graphen, die Oleiniksche Entropiebedingung ist also nie erfüllt. Da $Q''(u) > 0$ für dieses Intervall gilt, folgt, daß die Lösung eine einfache Verdünnungswelle ist, also

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{für } x < Q'(u_L)t, \\ (Q')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{für } Q'(u_L)t < x < Q'(u_R)t, \\ u_R & \text{für } x > Q'(u_R)t. \end{cases}$$

Wir betrachten nun $u_R > 0$. Die Lösung ist für u_R gemäß der Oleinikschen Entropiebedingung zusammengesetzt, das heißt, wir bestimmen zu u_R eine Stelle u^* so, daß die Tangente an $Q(u)$ durch u^* auch durch u_R geht. Ein solches u^* zwischen u_L und 0 existiert für $u_R > 0$ und $u_R < u^{**}$, wobei u^{**} der Schnittpunkt der Tangente durch u_L mit dem rechten Ast von $Q(u)$ ist. Um u^{**} zu ermitteln, lösen wir die Gleichung

$$Q(u_L) + (u^{**} - u_L)Q'(u_L) = -\left(u^{**} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

mit der (uns interessierenden) Lösung $u^{**} = \frac{1}{2}(\sqrt{29} - 3)$. Wir setzen nun unsere Fallunterscheidung fort.

$0 < u_R < u^{**}$. Die Lösung ist zusammengesetzt. Für alle u_R aus diesem Intervall existiert ein u^* mit $u_L < u^* < 0$ derart, daß die Tangente an den Graphen von $Q(u)$ in $u = u^*$ den rechten Ast in $(u_R, Q(u_R))$ schneidet. (Wir verzichten auf eine explizite algebraische Darstellung.) Die Entropielösung hat dann die Form

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{für } x < Q'(u_L)t, \\ (Q')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{für } Q'(u_L)t < x < Q'(u^*)t, \\ u_R & \text{für } x > Q'(u^*)t = \frac{Q(u^*) - Q(u_R)}{u^* - u_R}t. \end{cases}$$

$\frac{u_R > u^{**}}$. Für diese u_R ist die Sekantenbedingung (Aufgabe 2) immer erfüllt. Die Lösung lautet daher

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{für } x < \sigma t, \\ u_R & \text{für } x > \sigma t, \end{cases} \quad \sigma = \frac{Q(u_R) - Q(u_L)}{u_R - u_L}.$$

b) Dieser Aufabenteil wird mit ähnlichen Überlegungen gelöst.

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (12 Punkte) Wir betrachten die Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (7.0.1)$$

mit einer Flußfunktion $f(u)$ mit den Eigenschaften $f \in C^2[0,1]$, $f \in C^0(\mathbb{R})$,

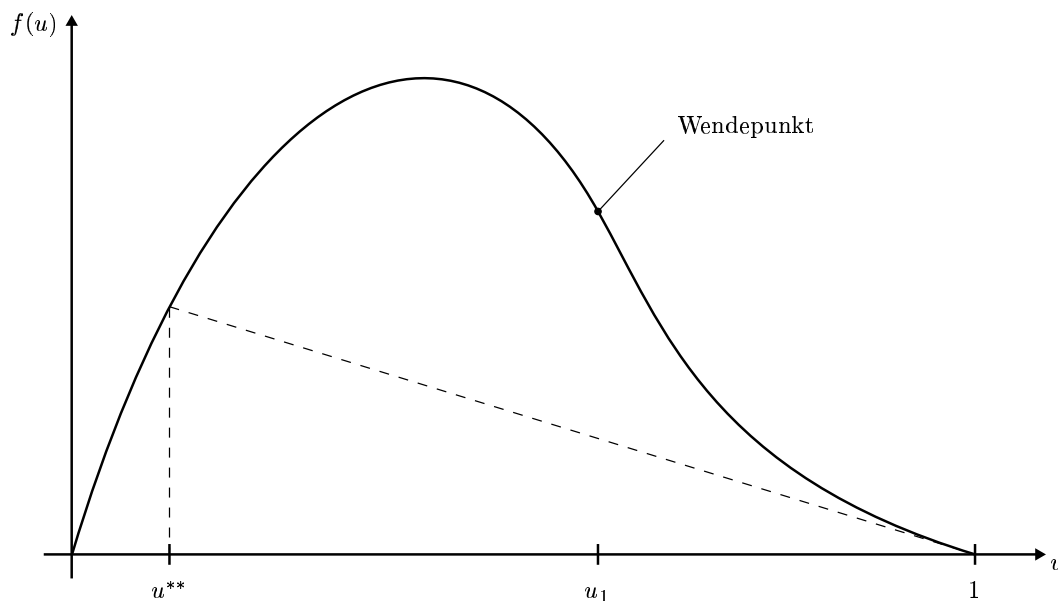
$$f(u) \begin{cases} > 0 & \text{für } u \in (0,1) \\ = 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad f'(0^+) > 0, \quad f'(1^-) < 0, \quad f''(u) \begin{cases} < 0 & \text{für } 0 < u < u_1, \\ > 0 & \text{für } u_1 < u < 1 \end{cases} \quad (7.0.2)$$

und dem Anfangsdatum

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ u_0 & \text{für } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{für } x \geq 1, \end{cases} \quad 0 \leq u_0 \leq 1.$$

Dieses Problem beschreibt die Sedimentation einer Suspension der Anfangskonzentration u_0 in einer Sedimentationssäule. Zeigen Sie, daß dieses Problem in Abhängigkeit von der Wahl von u_0 genau drei qualitativ verschiedene stückweise glatte Entropielösungen hat.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 Die Flußfunktion sieht wie folgt aus:



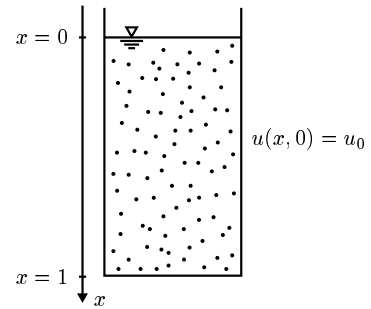
Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich, indem wir die Lösungen zweier verschiedener Riemann-Probleme miteinander kombinieren:

$$R_0 : \quad u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ u_0 & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

$$R_1 : \quad u_0(x) = \begin{cases} u_0 & \text{für } x < 1, \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Wir lösen diese Riemann-Probleme zunächst separat (und lassen hierbei u_0 variieren). Sodann betrachten wir die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Problemen. Man sieht leicht, daß die die Punkte $(0, f(0) = 0)$ und $(u_0, f(u_0))$ verbundene Sekante für alle $0 < u_0 < 1$ ganz unterhalb des Graphen von f verläuft. Daher lautet die Entropielösung des Problems R_0 :

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < s_1 t, \\ u_0 & \text{für } x > s_1 t, \end{cases} \quad s_1 = \frac{f(u_0) - f(0)}{u_0 - 0} = \frac{f(u_0)}{u_0} > 0. \quad (7.0.3)$$



Die Lösung des Problems R_1 ist komplizierter. Um die hierbei auftretenden Fälle unterscheiden zu können, definieren wir $u^{**} < 1$ als Lösung der Gleichung

$$f(u^{**}) = f'(1)(u - 1).$$

Es gilt $0 < u^{**} < u_1$. Damit ergeben sich drei Fälle:

(a) $0 < u_0 < u^{**}$,

(b) $u^{**} < u_0 < u_1$,

(c) $u_1 < u_0 < 1$.

(a) Sei $0 < u_0 < u^{**}$. Dann liegt die Sekante zwischen $(u_0, f(u_0))$ und $(1, 0)$ ganz unterhalb des Graphen von f . Folglich hat das Riemann-Problem R_1 die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0 & \text{für } x < s_2 t + 1, \\ 1 & \text{für } x > s_2 t + 1, \end{cases} \quad s_2 = \frac{f(u_0) - f(1)}{u_0 - 1} = \frac{f(u_0)}{u_0 - 1} < 0. \quad (7.0.4)$$

Wir sehen, daß die in (7.0.3) und (7.0.4) auftretenden Stöße sich schneiden, und zwar zum Zeitpunkt t_1 mit

$$s_2 t_1 + 1 = s_1 t_1,$$

also

$$t_1 = -\frac{1}{s_2 - s_1} > 0.$$

Folglich lautet die Lösung zunächst

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < s_1 t, \\ u_0 & \text{für } s_1 t < x < s_2 t + 1, \\ 1 & \text{für } x > s_2 t + 1, \end{cases} \quad t < t_1. \quad (7.0.5)$$

Die x -Koordinate des Schnittpunkts ist

$$x_1 = s_1 t_1 = -\frac{\frac{f(u_0)}{u_0}}{\frac{f(u_0)}{u_0 - 1} - \frac{f(u_0)}{u_0}} = -\frac{\frac{1}{u_0}}{\frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_0}} = -\frac{1}{\frac{u_0}{u_0 - 1} - 1} = 1 - u_0.$$

Zum Zeitpunkt $t = t_1$ haben wir das Riemann-Problem

$$u(x, t_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 - u_0, \\ 1 & \text{für } x > 1 - u_0 \end{cases}$$

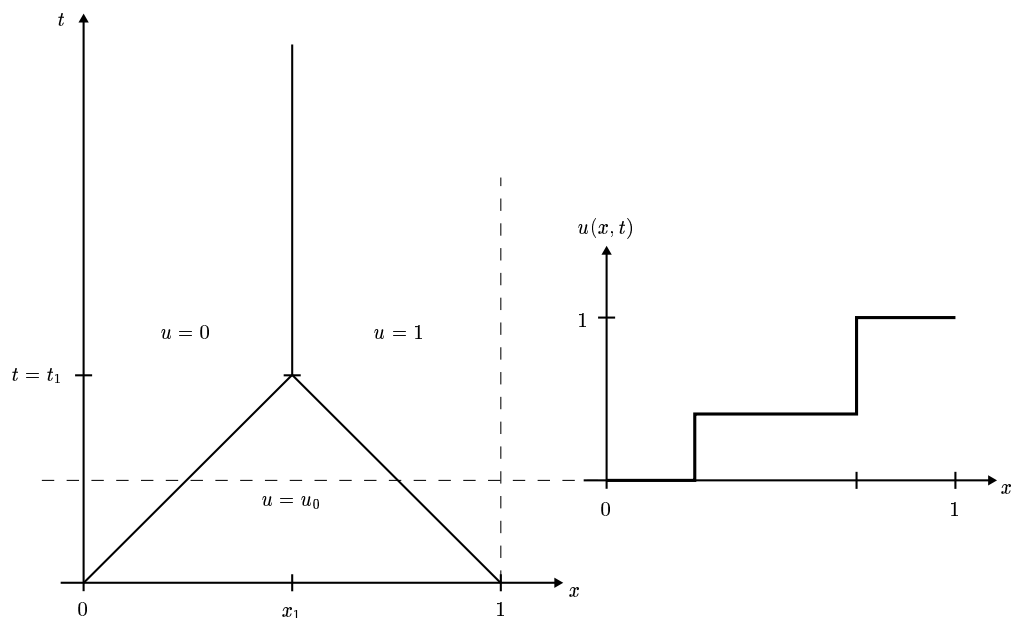
mit der stationären Lösung, welche auch die Lösung (7.0.5) fortsetzt:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 - u_0, \\ 1 & \text{für } x > 1 - u_0, \end{cases} \quad t > t_1.$$

Man beachte, daß offenbar gilt:

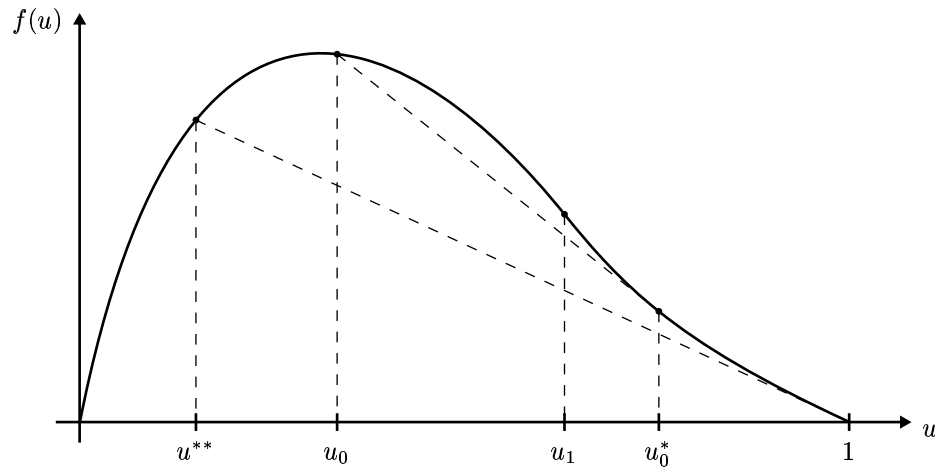
$$(1 - x_1) \cdot 1 = 1 \cdot u_0,$$

d.h. zum Zeitpunkt $t = t_1$ befindet sich der gesamte Feststoff der Ausgangssuspension im Sediment.



Diese qualitative Lösung bezeichnen wir als “Mode-I-Sedimentation” (MS-I).

(b) Wir betrachten nun den Fall $u^{**} < u_0 < u_1$, der der folgenden Situation entspricht:



Offenbar ist (7.0.4) keine Entropielösung, denn die Sekante zwischen $(u_0, f(u_0))$ und $(1, f(1))$ verläuft nicht vollständig unterhalb des Graphen von f . Vielmehr müssen wir zunächst einen Punkt $u_1 < u_0^* < 1$ ermitteln mit

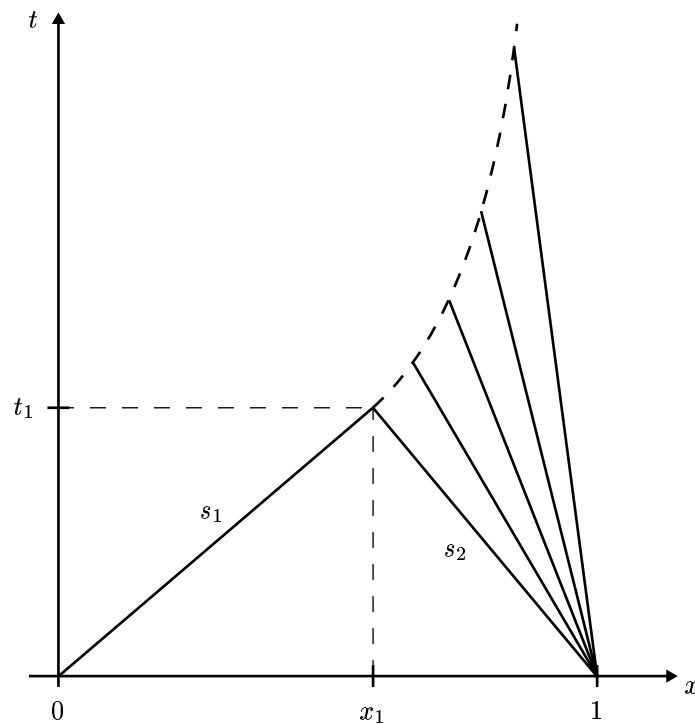
$$f(u_0^*) + (u_0 - u_0^*)f'(u_0^*) = f(u_0).$$

Man überzeugt sich sodann, daß die Entropielösung des Riemann-Problems R_1 gegeben ist durch eine Kontaktunstetigkeit, gefolgt von einer Verdünnungswelle:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0 & \text{für } x < s_2 t + 1, \\ (f')^{-1}\left(\frac{x-1}{t}\right) & \text{für } s_2 t + 1 < x < f'(1)t + 1, \\ 1 & \text{für } x > f'(1)t + 1, \end{cases} \quad s_2 = \frac{f(u_0) - f(u_0^*)}{u_0 - u_0^*} = f'(u_0^*).$$

Der Zeitpunkt t_1 sei wie in (a) als Schnitt der Stöße mit den Ausbreitungsgeschwindigkeiten s_1 und s_2 bestimmt. Dann ist die gesamte Lösung für $t < t_1$ gegeben durch:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < s_1 t, \\ u_0 & \text{für } s_1 t < x < s_2 t + 1, \\ (f')^{-1}\left(\frac{x-1}{t}\right) & \text{für } s_2 t + 1 < x < f'(1)t + 1, \\ 1 & \text{für } x > f'(1)t + 1 \end{cases}$$



Wir müssen uns nun mit der Wechselwirkung des Stoßes s_1 mit der Verdünnungswelle befassen. Der Lösungswert 0 trifft dabei nacheinander auf die Lösungswerte u zwischen u_0^* und 1. Dabei entsteht ein gekrümmter Stoß s_3 mit der Trajektorie $t \mapsto x_3(t)$, für die an jedem Punkt gilt:

$$x_3'(t) = \frac{f\left((f')^{-1}\left(\frac{x_3(t)-1}{t}\right)\right) - f(0)}{(f')^{-1}\left(\frac{x_3(t)-1}{t}\right) - 0}, \quad x_3(t_1) = x_1.$$

Die Differentialgleichung können wir auch etwas kompakter schreiben als

$$x_3'(t) = \frac{f\left((f')^{-1}\left(\frac{x_3(t)-1}{t}\right)\right)}{(f')^{-1}\left(\frac{x_3(t)-1}{t}\right)} > 0. \quad (7.0.6)$$

Aus (7.0.6) folgt

$$x_3''(t) = \frac{\left(x_3'(t) - \frac{x_3(t)-1}{t}\right)^2}{t f''\left((f')^{-1}\left(\frac{x_3(t)-1}{t}\right)\right) \left[(f')^{-1}\left(\frac{x_3(t)-1}{t}\right)\right]}.$$

Da wir $(f')^{-1}$ nur für $u > u_1$ betrachten, gilt

$$f''\left((f')^{-1}\left(\frac{x_3(t)-1}{t}\right)\right) > 0$$

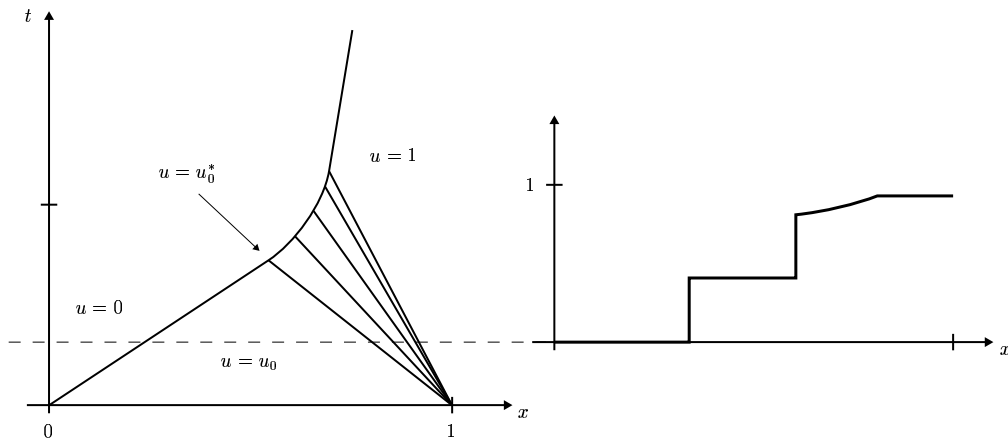
und daher $x_3''(t) > 0$, d.h. der Stoß ist konvex für $t > t_1$. Der Stoß s_3 trifft auf die Charakteristik $x_4(t) = f'(1)t + 1$ zu einem Zeitpunkt $t_2 > t_1$. (Wir verzichten hier auf eine Herleitung des Zeitpunkts t_2 .) Zum Zeitpunkt t_2 hat man wieder ein Riemann-Problem mit dem linken Zustand 0 und dem rechten 1. Es stellt sich daher eine stationäre Lösung für $t > t_2$ ein. Wir haben damit

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_3(t), \\ (f')^{-1}\left(\frac{x-1}{t}\right) & \text{für } x_3(t) < x < x_4(t), \\ 1 & \text{für } x > x_4(t) \end{cases} \quad \text{für } t_1 < t < t_2$$

und

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_2, \\ 1 & \text{für } x > x_2, \end{cases} \quad t > t_2$$

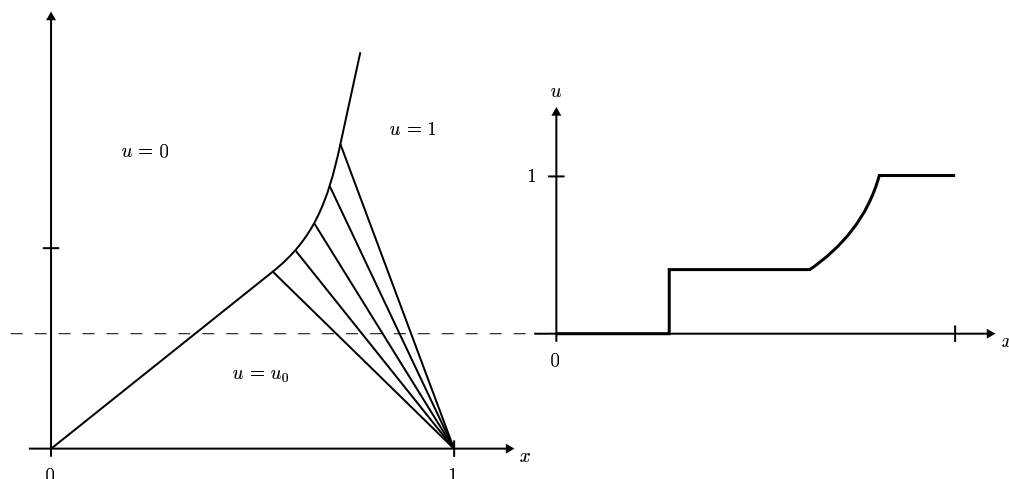
wobei x_2 die Höhe ist, an der sich $x_3(t)$ und $x_4(t)$ treffen. ² Die Lösung sieht wie folgt aus:



Diese Lösung ist eine Mode-II-Sedimentation (MS-II).

- (c) Für $u_1 < u_0 < 1$ ergibt sich eine ähnliche Lösung, bei der jedoch $u_0 = u_0^*$ gilt (das macht man sich am Graphen leicht klar). Folglich ist der Stoß s_2 durch die Charakteristik $x_2(t) = f'(u_0)t - 1$ zu ersetzen. Mit analogen Überlegungen erhalten wir

² Algebraische Ausdrücke für t_2 und x_2 findet man in [27] p.117.



Aufgabe 2 (12 Punkte) Wir betrachten die Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0; \quad f(u) = \begin{cases} -u/2 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ u/2 & \text{für } 0 \leq u \leq 1, \\ 3u/2 - 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad (7.0.1)$$

a) Ermitteln Sie die Entropielösungen aller 12 Riemann-Probleme für (7.0.1) mit

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{für } x < 0, \\ u_R & \text{für } x > 0, \end{cases} \quad u_L, u_R \in \{-1, 0, 1, 2\}.$$

b) Lösen Sie dann das Anfangswertproblem für (7.0.1) mit

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq x_1, \\ -1 & \text{für } x_1 < x \leq x_2, \\ 1 & \text{für } x > x_2. \end{cases}$$

c) Die Funktion $f(u)$ ist eine stückweise lineare, stetige Approximation der Funktion $g(u) = u^2/2$. Welchen Vorteil bietet die Verwendung der Funktion $f(u)$ für dieses Anfangswertproblem?

d) Skizzieren Sie das Näherungsverfahren, das dieses Vorgehen allgemein zur Lösung des Anfangswertproblems

$$u_t + h(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0; \quad u(x,0) = u_0(x), \quad h, u_0 \in C^1$$

nahelegt, wenn man $h(u)$ stückweise linear und $u_0(x)$ auf eine bestimmte Weise stückweise konstant approximiert. (Dieses Verfahren ist als *Front Tracking* bekannt.)

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 Siehe § 1.13 im Skript.

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (6 Punkte) Beweisen Lemma 1.13.2 der Vorlesung: Sei u Frontverfolgungslösung zu stückweise konstanten Anfangswerten $f(x)$. Dann gilt für jedes $t_2 > t_1 > 0$ die Ungleichung

$$\|u(\cdot, t_2)\|_{BV} \leq \|u(\cdot, t_1)\|_{BV}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 Sei $\tilde{u}(x, t)$ für $0 < t \leq t_1$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial g(\tilde{u})}{\partial x} = 0, \quad \tilde{u}(x, t = 0) = f(x).$$

Wir betrachten ferner das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > t_1; \quad u(x, t_1) = \tilde{u}(x, t_1). \quad (7.0.1)$$

Gleichzeitig betrachten wir für $h > 0$ das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial g(v)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > t_1; \quad v(x, t_1) = \tilde{u}(x + h, t_1).$$

Mit Satz 1.13.3 folgt dann für alle $t > t_1$:

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t_1) - v(\cdot, t_1)\|_{L^1(\mathbb{R})}. \quad (7.0.2)$$

Wegen $v(x, t) = u(x + h, t)$ für alle $t \geq t_1$ und $x \in \mathbb{R}$ folgt aus (7.0.2)

$$\frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |u(x + h, t) - u(x, t)| dx \leq \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |u(x + h, t_1) - u(x, t_1)| dx$$

und insbesondere mit $t = t_2$

$$\begin{aligned} \text{TV}(u(\cdot, t_2)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |u(x + h, t_2) - u(x, t_2)| dx \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |u(x + h, t_1) - u(x, t_1)| dx = \text{TV}(u(\cdot, t_1)). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte) Gegeben sei die polygonale Funktion f^δ , die auf $\delta i, \delta(i + 1)$, $i = 0, \dots, 1/\delta - 1$ linear sei mit

$$f^\delta(i\delta) = g(i\delta), \quad i = 0, \dots, 1/\delta, \quad g(u) = u(1 - u)^2, \quad \delta := 0.25.$$

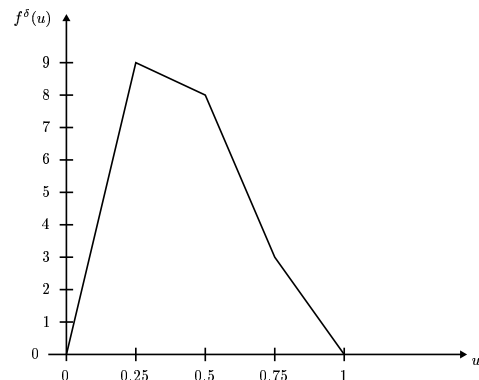
Ermitteln Sie Frontverfolgungsnäherungslösungen zur Aufgabenstellung von Aufgabe 1 aus der 7. Übung, indem Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u^\delta}{\partial t} + \frac{\partial f^\delta(u)}{\partial x} = 0, \quad u_0^\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ u_0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

für $u_0 = 0.25$, $u_0 = 0.5$ bzw. $u_0 = 0.75$ lösen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

Die Funktion f^δ ist die stückweise stetige lineare Interpolation der Punkte $f^\delta(0) = 0$, $f^\delta(\frac{1}{4}) = \frac{9}{64}$, $f^\delta(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} = \frac{8}{64}$, $f^\delta(\frac{3}{4}) = \frac{3}{64}$ und $f^\delta(1) = 0$. Um die Aufgabe zu vereinfachen, multiplizieren wir die Funktion mit 64.



a) Wir betrachten das Anfangsdatum

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 0.25 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Das Riemann-Problem an $x = 0$ hat den linken Zustand 0 und den rechten 0.25. Seine Lösung lautet daher

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq s_1 t, \\ 0.25 & \text{für } x \geq s_1 t, \end{cases} \quad s_1 := \frac{f^\delta(0.25) - f^\delta(0)}{0.25} = 36. \quad (\text{S}_1)$$

Die Lösung des Riemann-Problems an $x = 1$ ergibt sich durch Bildung der unteren konvexen Einhüllenden zwischen $(0.25, f^\delta(0.25))$ und $(1, f^\delta(1))$. Diese Einhüllende ist gerade ein lineares Segment, so daß die Lösung des Riemann-Problems an $x = 1$ wie folgt lautet:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0.25 & \text{für } x - 1 \leq s_2 t, \\ 1 & \text{für } x - 1 \geq s_2 t, \end{cases} \quad s_2 := \frac{f^\delta(0.25) - f^\delta(1)}{-0.75} = -12. \quad (\text{S}_2)$$

Die Stöße (S₁) und (S₂) kollidieren am Punkt (x_1, t_1) mit den Koordinaten

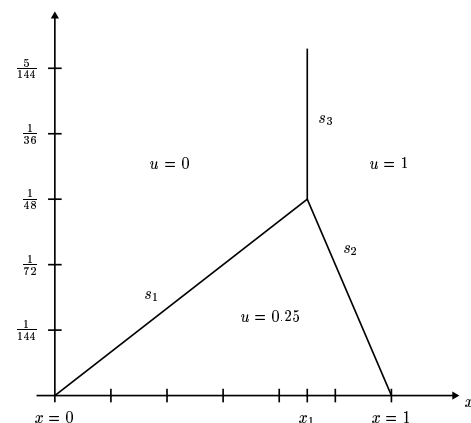
$$36t_1 = 1 - 12t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{1}{48},$$

$$x_1 = \frac{36}{48} = 0.75.$$

Zum Zeitpunkt t_1 haben wir ein Riemann-Problem mit linkem Zustand 0 und rechtem Zustand 1. Dessen Lösung lautet

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0.75 + s_3 t, \\ 1 & \text{für } x > 0.75 + s_3 t, \end{cases} \quad (\text{S}_3)$$

$$s_3 = \frac{f^\delta(1) - f^\delta(0)}{1} = 0, \quad t > t_1.$$



b) Wir betrachten nun das Anfangsdatum

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 0.5 & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Das Riemann-Problem an $x = 0$ hat die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq s_1 t, \\ 0.5 & \text{für } x \geq s_1 t, \end{cases} \quad s_1 = \frac{f(0.5) - f(0)}{0.5} = 16. \quad (\text{S}_1)$$

Das Riemann-Problem an $x = 1$ hat die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 0.5 & \text{für } x - 1 \leq s_2 t, \\ 0.75 & \text{für } s_2 t < x - 1 \leq s_3 t, \\ 1 & \text{für } x - 1 > s_3 t \end{cases} \quad (\text{S}_{2,3})$$

mit den Stoßausbreitungsgeschwindigkeiten

$$s_2 = \frac{f(0.75) - f(0.5)}{0.25} = -20, \quad s_3 = \frac{f(1) - f(0.75)}{0.75}.$$

Offenbar kollidieren die Stöße S_1 und S_2 , und zwar an (x_1, t_1) mit

$$16t_1 = 1 - 20t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{1}{36}, \quad x_1 = \frac{4}{9}.$$

Das Riemann-Problem an (x_1, t_1) hat die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x - x_1 \leq s_4(t - t_1), \\ 0.75 & \text{für } x - x_1 > s_4(t - t_1), \end{cases} \quad s_4 = \frac{f(0.75) - f(0)}{0.75} = 4. \quad (\text{S}_4)$$

Der Stoß S_4 schneidet den Stoß S_3 zum Zeitpunkt t_2 an der Stelle $x = x_2$ mit

$$\frac{4}{9} + \left(t_2 - \frac{1}{36}\right) \cdot 4 = 1 - 12t_2$$

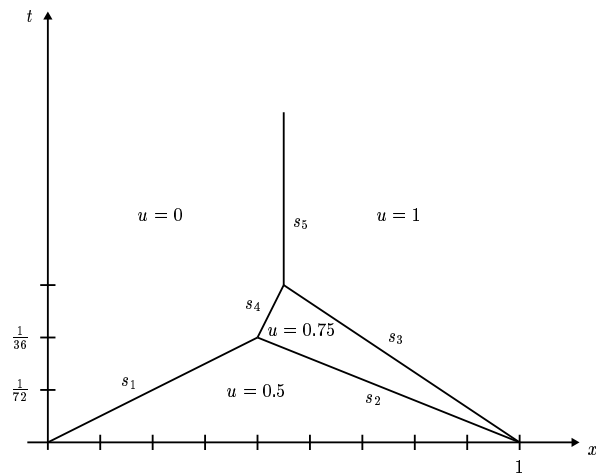
$$\Leftrightarrow \quad t_2 = \frac{1}{24},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Die Lösung für $t \geq t_2$ ist

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \frac{1}{2} + s_5 t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{1}{2} + s_5 t, \end{cases}$$

$$s_5 = \frac{f(0) - f(1)}{1} = 0.$$



c) Die Lösung für $u = 0.75$ wird wie in a) ermittelt.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Verwenden Sie die Konstruktionsmethode von M. Kunik, um die Werte der Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad f(u) = \frac{1}{2}u^2, \quad u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 2x - 1 & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ 3x - 3 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

für $t = 1$, $t = 2$, und $x = 0, 1, 2, 3, 4$ zu finden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

Da die Anfangsfunktion $u_0(x)$ für ganz \mathbb{R} definiert ist, verwenden wir die Punkte $x_0 := 0$, $x_1 := 1$, $x_2 := 3$, und fügen dem Datensatz noch Punkte $x_{-1} < 0$ und $x_3 > 0$ hinzu. Wir berechnen nun die Zahlen m_{-1}, \dots, m_2 und n_{-1}, \dots, n_2 aus:

$$\begin{aligned} m_{-1}x_{-1} + n_{-1} &= f(x_{-1}) \\ \wedge \quad m_{-1}x_0 + n_{-1} &= f(x_0) \\ \Leftrightarrow \quad m_{-1}x_{-1} + n_{-1} &= 0 \\ \wedge \quad n_{-1} &= 0 \\ \Rightarrow \quad m_{-1} = 0, \quad n_{-1} &= 0; \end{aligned}$$

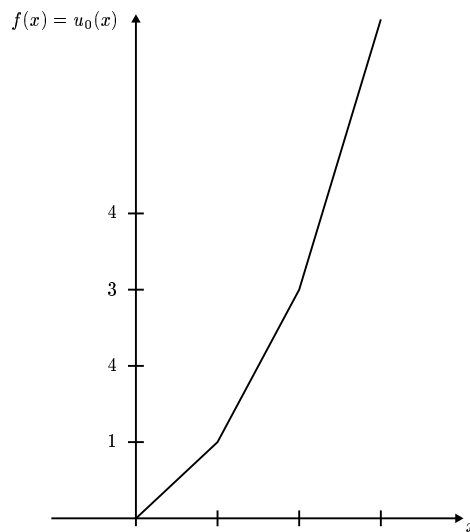
$$\begin{aligned} m_0x_0 + n_0 &= f(x_0) \\ \wedge \quad m_0x_1 + n_0 &= f(x_1) \\ \Leftrightarrow \quad n_0 = 0 \\ \wedge \quad m_0 + n_0 = 1 &\Rightarrow \quad m_0 = 1, \quad n_0 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1x_1 + n_1 &= f(x_1) \\ \wedge \quad m_1x_2 + n_1 &= f(x_2) \\ \Leftrightarrow \quad m_1 + n_1 = 1 \\ \wedge \quad 2m_1 + n_1 = 3 &\Rightarrow \quad m_1 = 2, \quad n_1 = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2x_2 + n_2 &= f(x_2) \\ \wedge \quad m_2x_3 + n_2 &= f(x_3) \\ \Leftrightarrow \quad 2m_2 + n_2 = 3 \\ \wedge \quad x_3m_2 + n_2 = 3x_3 - 3 &\Rightarrow \quad m_2 = 3, \quad n_2 = -3; \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $Q(u) = \frac{1}{2}u^2$, $Q'(u) = u$ verwendet. Insbesondere gilt $g(u) = u$. Damit haben wir das wie folgt definierte neue Anfangsdatum $\tilde{f}(\xi)$ (welches in der Notation der Aufgabenstellung $\tilde{u}_0(\xi)$ heißen müßte):

$$\tilde{f}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \leq 0, \\ \xi & \text{für } 0 < \xi \leq 1, \\ 2\xi - 1 & \text{für } 1 < \xi \leq 2, \\ 3\xi - 3 & \text{für } \xi > 2. \end{cases}$$



Bevor wir die Lösungsmethode anwenden können, müssen wir noch die Integrale $I_k(x,t)$ explizit angeben. Wir erhalten:

$$\underline{k = -1}: \quad M = \max \left\{ j \mid x_j \leq \frac{x - tn_{-1}}{1 + tm_{-1}} \right\} = \max \{ j \mid x_j \leq x \},$$

$$\underline{k = 0}: \quad M = \max \left\{ j \mid x_j \leq \frac{x - tn_0}{1 + tm_0} \right\} = \max \left\{ j \mid x_j \leq \frac{x}{1+t} \right\},$$

$$\underline{k = 1}: \quad M = \max \left\{ j \mid x_j \leq \frac{x - tn_1}{1 + tm_1} \right\} = \max \left\{ j \mid x_j \leq \frac{x+t}{1+2t} \right\},$$

$$\underline{k = 2}: \quad M = \max \left\{ j \mid x_j \leq \frac{x - tn_2}{1 + tm_2} \right\} = \max \left\{ j \mid x_j \leq \frac{x+3t}{1+3t} \right\}.$$

Wir erhalten schließlich folgende Tabelle.

		$t = 1$					$t = 2$				
		$x = 0$	1	2	3	4	$x = 0$	1	2	3	4
$k = -1$	x	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
	M	0	1	2	2	2	0	1	2	2	2
$k = 0$	$\frac{x}{1+t}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$
	M	0	0	1	1	2	0	0	0	1	1
$k = 1$	$\frac{x+t}{1+2t}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{6}{5}$
	M	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
$k = 2$	$\frac{x+3t}{1+3t}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{6}{7}$	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$
	M	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1

Um die Verhältnisse etwas zu vereinfachen, greifen wir uns nur einen Punkt heraus, nämlich $x = 3$, $t = 1$. Wir ermitteln nun die Indexmenge $\mathcal{I}(x,t)$ für diese Stelle. Mit

$$S := \max \{ |Q'_{\max}|, |Q'_{\min}| \} = 3$$

folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}(3,1) &= \{ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x - tS \leq x_k \leq x + tS \} \Big|_{x=3, t=1} \\ &= \{ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x - 3 \leq x_k \leq x + 3 \} \Big|_{x=3} \\ &= \{0,1,2,3\}, \end{aligned}$$

bzw. wenn wir den Punkt x_3 groß genug wählen,

$$\mathcal{I}(3,1) = \{0,1,2\}.$$

Da im vorliegenden Beispiel gilt: $Q(u) = \frac{1}{2}u^2$, $Q'(u) = u$, $g'(u) = (Q'(u)) = u$, folgt $g(z) \cdot z - Q(g(z)) = z^2 - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}z^2$ und daher lautet das Minimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x,t; \tilde{u}) &= \min_{k \in \mathcal{I}(x,t)} \mathcal{F}(x,t; \tilde{u}_k(x,t)) \\ &= \min_{k \in \mathcal{I}(x,t)} \left\{ t \left[g \left(\frac{m_k x + n_k}{1 + tm_k} \right) \cdot \frac{m_k x + n_k}{1 + tm_k} - Q \left(g \left(\frac{m_k x + n_k}{1 + tm_k} \right) \right) \right] + I_k(x,t) \right\} \\ &= \min_{k \in \mathcal{I}(x,t)} \left\{ \frac{t}{2} \left(\frac{m_k x + n_k}{1 + tm_k} \right)^2 + I_k(x,t) \right\}. \end{aligned}$$

Wir müssen nun das Integral $I_k(x,t)$ für $k = 0,1,2$ berechnen. Für diese k s ist immer $M = 1$. Die Summe in (1.12.5) hat daher nur einen Summanden, nämlich den für $j = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m_0} \left\{ (m_0 x_1 + n_0) f(x_1) - Q(f(x_1)) - (m_0 x_0 + n_0) f(x_0) + Q(f(x_0)) \right\} \\ &= x_1 f(x_1) - Q(f(x_1)) - (m_0 x_0 + n_0) f(x_0) + Q(f(x_0)) \\ &= 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 0 \cdot f(x_0) + \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wir müssen dann für jedes k den zweiten Term in (1.12.5) berechnen. Für $k = 0$ ist

$$\xi := \frac{x - tn_0}{1 + tm_0} = \frac{3 - 1 \cdot 0}{1 + 1 \cdot 1} = \frac{3}{2},$$

also $\xi \in [x_1, x_2]$ und daher $\tilde{f}(\xi) = g(m_1 \xi + n_1) = m_1 \xi + n_1 = 2\xi + 1$ und daher

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m_1} \left\{ \left(m_1 \frac{x - tn_0}{1 + tn_0} + n_1 \right) \tilde{f}(\xi) - Q(\tilde{f}(\xi)) - (m_1 x_1 + n_1) f(x_1) + Q(f(x_1)) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \right) \left(2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{3} - 1 \right)^2 - (2 \cdot +1) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 3 + \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 8 - 3 + \frac{1}{2} \right\} = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Für $k = 1$ ist

$$\xi := \frac{x - tn_1}{1 + tm_1} = \frac{3 - 1 \cdot 1}{1 + 1 \cdot 2} = \frac{2}{3},$$

also $\xi \in [x_0, x_1]$ und daher $\tilde{f}(\xi) = g(m_0 \xi + n_0) = \xi = \frac{2}{3}$. Daher gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m_1} \left\{ (m_1 \xi + n_1) \tilde{f}(\xi) - Q(\tilde{f}(\xi)) - \frac{5}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \right) \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 - \frac{5}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} - \frac{5}{2} \right\} = \frac{5}{9} - \frac{1}{9} - \frac{5}{4} = \frac{4}{9} - \frac{5}{4} = \frac{16 - 45}{36} = -\frac{29}{36}. \end{aligned}$$

Für $k = 2$ ist

$$\xi := \frac{x - tm_2}{1 + tm_2} = \frac{3 - (-3)}{1 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Wegen $\xi \in [x_1, x_2]$ ist daher (wie für $k = 0$) $\tilde{f}(\xi) = m_1\xi + n_1 = 2\xi + 1 = 4$ und daher ebenfalls $\frac{1}{m_1}\{\dots\} = \frac{11}{4}$. Damit haben wir

$$I_0(3,1) = \frac{1}{2} + \frac{11}{4} = \frac{13}{4}, \quad I_1(3,1) = \frac{1}{2} - \frac{29}{36} = -\frac{11}{36}, \quad I_2(3,1) = \frac{1}{2} + \frac{11}{4} = \frac{13}{4}.$$

Das Minimum wird daher für $k = 1$ angenommen, und wir erhalten

$$u(3,1) = g\left(\frac{m_1 \cdot 3 + n_1}{1 + 1 \cdot m_1}\right) = \frac{3 \cdot 2 + 1}{1 + 1 \cdot 2} = \frac{7}{3}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_{(x)}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

dem Impulssatz

$$\mathbf{v}_t + \frac{1}{2} \nabla_x(\mathbf{v}^2) - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla_x p,$$

der Gasgleichung

$$p = (c_p - c_v)\rho\theta$$

und dem Energiesatz ((1.1.27) im Skript) mit $\lambda = 0$:

$$\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2\right)_t + \operatorname{div}_{(x)}\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2\right) + \operatorname{div}_{(x)}(p\mathbf{v}) = \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}$$

leite man die zu diesen Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik hinzukommende Entropiegleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x S = 0$$

für glatte Lösungen her. Dabei sind $e = c_v\Theta$ die innere Energie, c_v und c_p die konstanten spezifischen Wärmen, Θ die Temperatur, ρ die Dichte, \mathbf{v} die Geschwindigkeit, p der Druck, \mathbf{K} die Massenkraft und

$$S = S_0 + c_v \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) - c_p \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

die (physikalische) Entropie. Wie lauten hier bei Stößen die Rankine-Hugoniot-Bedingungen?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4 Wir verwenden in dieser Aufgabe $\frac{du}{dt} := \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x u$.
Damit lautet der Energiesatz

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \left(e + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \right) + \rho \left(e + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) - \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) - \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (7.0.1)$$

Multipliziert man den Impulssatz skalar mit $\rho \mathbf{v}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Einsetzen in (7.0.1) liefert $\rho \frac{de}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Aus der Zustandsgleichung und der Definition von e folgt

$$\frac{de}{dt} = c_v \frac{d\theta}{dt} = \frac{c_v}{c_p - c_v} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho^2} p \frac{d\rho}{dt} \right).$$

Die Kontinuitätsgleichung liefert $\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt}$. Folglich lautet der Energiesatz

$$\frac{c_v}{c_p - c_v} \left(\frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{ds}{dt} \right) - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad p \frac{c_v}{c_p - c_v} \left\{ \frac{c_v}{p} \frac{dp}{dt} - (c_v + c_p - c_v) \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} \right\} = 0.$$

Somit gilt also

$$p \frac{c_v}{c_p - c_v} \frac{d}{dt} \left\{ c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} \right\} = 0.$$

Nun ist gerade $c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} = dS(p, \rho)$. Da im allgemeinen $p > 0$ gilt, folgt $\frac{dS}{dt} = 0$. Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen lauten für die Kontinuitätsgleichung

$$\rho_1 (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n} = \rho_2 (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n},$$

wobei ρ_1, \mathbf{v}_1 und ρ_2, \mathbf{v}_2 die Werte von ρ bzw. v links bzw. rechts des Sprunges seien, der sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_I ausbreiten möge. Aus der Impulserhaltung und der Energieerhaltung folgen analog

$$\begin{aligned} \rho_1 \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n} - \rho_2 \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n} &= (p_1 - p_2) \cdot \mathbf{n}, \\ \rho_1 \left(e_1 + \frac{\mathbf{v}_1^2}{2} \right) (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n} - \rho_2 \left(e_2 + \frac{\mathbf{v}_2^2}{2} \right) (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n} &= (p_1 \mathbf{v}_1 - p_2 \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (6 Punkte) *Beweisen Sie das Lemma von Crandall und Tartar:* Sei $D \subset L^1(\Omega)$, wobei Ω ein Maßraum sei. Wir nehmen an, für $\phi, \psi \in D$ sei auch $\phi \vee \psi := \max\{\phi, \psi\} \in D$. Ferner gebe es eine Abbildung $T : D \rightarrow L^1(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} T(\phi) = \int_{\Omega} \phi, \quad \phi \in D.$$

Dann sind folgende Aussagen für alle $\phi, \psi \in D$ äquivalent:

(i) $\phi \leq \psi \implies T(\phi) \leq T(\psi)$,

(ii) $\int_{\Omega} (T(\phi) - T(\psi))^+ \leq \int_{\Omega} (\phi - \psi), \quad \phi^+ := \phi \vee 0$,

(iii) $\int_{\Omega} |T(\phi) - T(\psi)| \leq \int_{\Omega} |\phi - \psi|$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 Wir nehmen an, es gelte $T(\phi \vee \psi) - T(\phi) \geq 0$, dann folgt trivialerweise $T(\phi) - T(\psi) \leq T(\phi \vee \psi) - T(\psi)$ und somit $(T(\phi) - T(\psi))^+ \leq T(\phi \vee \psi) - T(\psi)$. Des weiteren gilt

$$\int_{\Omega} (T(\phi) - T(\psi))^+ \leq \int_{\Omega} (T(\phi \vee \psi) - T(\psi)) = \int_{\Omega} (\phi \vee \psi - \psi) = \int_{\Omega} (\phi - \psi)^+,$$

und somit gilt (ii). Wir nehmen nun an, es gelte (ii). Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |T(\phi) - T(\psi)| &= \int_{\Omega} (T(\phi) - T(\psi))^+ - \int_{\Omega} (T(\psi) - T(\phi))^+ \\ &\leq \int_{\Omega} (\phi - \psi)^+ + \int_{\Omega} (\psi - \phi)^+ = \int_{\Omega} |\phi - \psi|, \end{aligned}$$

d.h. es gilt (iii). Wir müssen noch (iii) \implies (i) zeigen. Sei nun $\phi \leq \psi$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^+ = \frac{|x| + x}{2}$, und somit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (T(\phi) - T(\psi))^+ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(\phi) - T(\psi)| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T(\phi) - T(\psi)) \\ &\leq \int_{\Omega} |\phi - \psi| + \int_{\Omega} (\phi - \psi) = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte) Beweisen Sie Satz 1.13.1 für den Fall, daß Q_1 und Q_2 nicht konvex sind. Beachten Sie hierzu den Hinweis am Ende des Beweises für Q_1, Q_2 des Satzes im Skript.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 Wir betrachten den Fall $u_\ell < u_r$. Offenbar kann der Beweis des Satzes auf nicht-konvexe Flußfunktionen ausgedehnt werden, wenn wir zeigen können:

$$\int_{u_\ell}^{u_r} |\underline{Q}_1'(u) - \underline{Q}_2'(u)| du \leq \int_{u_\ell}^{u_r} |Q_1'(u) - Q_2'(u)| du. \quad (*)$$

(Der Fall $u_\ell > u_r$, in welchem die konkaven Enveloppen \widehat{Q}_1 und \widehat{Q}_2 zu verwenden sind, wird analog behandelt.)

Sei nun D der Raum der stückweise konstanten Funktionen auf $[u_r, u_\ell]$. Für jede stückweise lineare und stetige Flußfunktion Q ist $Q' \in D$. Wir definieren $T(Q') := (\underline{Q})'$, wobei die konvexe Enveloppe auf dem Intervall $[u_r, u_\ell]$ gebildet wird. Dann gilt

$$\int_{u_\ell}^{u_r} T(Q') du = \int_{u_\ell}^{u_r} (\underline{Q})'(u) du = \underline{Q}(u_r) - \underline{Q}(u_\ell) = Q(u_r) - Q(u_\ell) = \int_{u_\ell}^{u_r} Q'(u) du.$$

Um (*) zu zeigen, reicht es, nachzuweisen, daß (i) gilt, das heißt $Q_1' \leq Q_2' \Rightarrow T(Q_1') \leq T(Q_2')$ für $Q_1 = Q$ und eine weitere lineare und stetige Flußfunktion Q .

Zum Beweis nehmen wir das Gegenteil an, und sei $[u_1, u_2]$ das Intervall, dessen Endpunkt u_ℓ am nächsten liegt, mit der Eigenschaft $\underline{Q}_1' > \underline{Q}_2'$. Ferner sei u_2 maximal gewählt. Nach Konstruktion muß u_1 eine Knickstelle von \underline{Q}_1 sein. Daher gilt $\underline{Q}_1(u_1) = Q_1(u_1)$, während u_2 eine Knickstelle von \underline{Q}_2 sein muß. Daher gilt $\underline{Q}_2(u_2) = Q_2(u_2)$. Verwenden wir diese Identitäten sowie die Tatsache, daß die untere konvexe Enveloppe niemals die Funktion selbst übertrifft, so folgt

$$Q_2(u_2) - Q_2(u_1) \leq \underline{Q}_2(u_2) - \underline{Q}_2(u_1) < \underline{Q}_1(u_2) - \underline{Q}_1(u_1) \leq Q_1(u_2) - Q_1(u_1),$$

ein Widerspruch. Wir folgern, daß die Eigenschaft (i) des Crandall-Tartar-Lemmas erfüllt ist, somit (iii) gilt und daher (*).

Aufgabe 3 (6 Punkte) Ermitteln Sie die Normalform des Systems

$$\begin{aligned} (x^2 + 4) \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} + (x^2 + 6) \frac{\partial u}{\partial y} - (x^2 + 2) \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} - y \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{5}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{3}{2} \frac{\partial v}{\partial y} - 2y \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \sin x \frac{\partial v}{\partial x} + 3 \frac{\partial w}{\partial x} + (1 + \sin x) \frac{\partial u}{\partial y} + (\sin x - 1) \frac{\partial v}{\partial y} + 6 \frac{\partial w}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 Das vorgelegte System ist von der Bauart $A\mathbf{u}_x + B\mathbf{u}_y = 0$ mit $B = AC$,

$$A = \begin{bmatrix} x^2 + 4 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -y \\ 1 & \sin x & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wir nehmen an, x und y seien so gewählt, daß $\det A \neq 0$ gilt. Dann können wir mit A^{-1} durchmultiplizieren und erhalten das System $\mathbf{u}_x + C\mathbf{u}_y = 0$. Offenbar ist in diesem System die Gleichung für w von denen für u und v entkoppelt, wenn wir $\mathbf{u} = (u, v, w)^\top$ setzen. Die relevanten Eigenwerte ergeben sich aus $\det(\lambda A - B) = 0$, also $\det(\lambda I - C) = 0$, d.h. aus der Gleichung

$$(2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 1) = 0.$$

Wir erhalten $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$, $\lambda_3 = 2$. Zu diesen Eigenwerten gehören folgende Eigenvektoren von C :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normiert lauten diese Vektoren

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In unserem Beispiel gilt $p_\ell^\top C = \lambda p_\ell^\top$, und wir erhalten die Normalform mit

$$\mathbf{p}_\ell^\top \frac{\partial}{\partial \gamma_\ell} \mathbf{u} = 0, \quad \ell = 1, 2, 3; \quad \frac{\partial}{\partial \gamma_\ell} = \alpha_\ell \frac{\partial}{\partial x} + \beta_\ell \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha_\ell = 1, \quad \beta_\ell = \lambda_\ell$$

für $\ell = 1, \dots, 3$.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Beweisen Sie Lemma 3.3.1.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4 Der Fall $\det A = \det B = 0$ kann als Entartungsfall angesehen werden. O.B.d.A. setzen wir daher $\det A \neq 0$ voraus. Aus

$$A\mathbf{u}_x + B\mathbf{u}_y + \mathbf{f} = 0 \tag{7.0.1}$$

folgt dann

$$\mathbf{u}_x + A^{-1}B\mathbf{u}_y + A^{-1}\mathbf{f} = 0; \quad \mathbf{p}^\top \mathbf{u}_x + \mathbf{p}^\top A^{-1}B\mathbf{u}_y + \mathbf{p}^\top A^{-1}\mathbf{f} = 0.$$

Sei nun $\lambda_{\ell+} \in \mathbb{C}$, und $\lambda_{\ell+} > \infty$ Lösung der Eigenwertgleichung $\mathbf{p}_\ell^\top (\lambda_\ell I - A^{-1}B) = C$ und $\mathbf{p}_{\ell+}$ der zugehörige Eigenvektor (dann ist $\overline{\mathbf{p}_{\ell+}}$ Eigenvektor zu $\overline{\lambda_{\ell+}}$). Aus

$$\mathbf{p}_{\ell+}^\top \mathbf{u}_x + \mathbf{p}_{\ell+}^\top A^{-1}B\mathbf{u}_y + \mathbf{p}_{\ell+}^\top A^{-1}\mathbf{f} = 0$$

folgt wegen $\lambda_{\ell+} \mathbf{p}_{\ell+}^\top = \mathbf{p}_{\ell+}^\top A^{-1}B$ die Gleichung

$$\mathbf{p}_{\ell+}^\top \mathbf{u}_x + \lambda_{\ell+} \mathbf{p}_{\ell+}^\top \mathbf{u}_y + \mathbf{p}_{\ell+}^\top A^{-1}\mathbf{f} = 0.$$

Weiterhin folgt

$$\mathbf{p}_{\ell+}^\top \mathbf{u}_x + \frac{\partial \mathbf{p}_{\ell+}^\top}{\partial x} \mathbf{u} + \lambda_{\ell+} \left[\mathbf{p}_{\ell+}^\top \mathbf{u}_y + \frac{\partial \mathbf{p}_{\ell+}^\top}{\partial y} \mathbf{u} \right] = -\mathbf{p}_{\ell+}^\top A^{-1} \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\ell+}^\top}{\partial x} \mathbf{u} + \lambda_{\ell+} \frac{\partial \mathbf{p}_{\ell+}^\top}{\partial y} \mathbf{u}.$$

Mit $w_\ell := \mathbf{p}_{\ell+}^\top \cdot \mathbf{u}$ folgt

$$\frac{\partial w_\ell}{\partial x} + \lambda_\ell \cdot \frac{\partial w_\ell}{\partial y} = F_\ell \cdot (1 - i\lambda_{\ell+}), \quad F_\ell \cdot (1 - i\lambda_{\ell+}) := -\mathbf{p}_{\ell+}^\top A^{-1} \mathbf{f} + \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\ell+}^\top}{\partial x} + \lambda_{\ell+} \frac{\partial \mathbf{p}_{\ell+}^\top}{\partial y} \right) \mathbf{u}.$$

Wegen $\text{Im}\lambda_{\ell+} > 0$ folgt $1 - i\lambda_{\ell+} = 1 - i(\text{Re}\lambda_{\ell+} + i\text{Im}\lambda_{\ell+}) = (1 + \text{Im}\lambda_{\ell+}) - i\text{Re}\lambda_{\ell+}$, also $1 - i\lambda_{\ell+} \neq 0$. Division durch $1 - i\lambda_{\ell+}$ führt auf

$$\frac{\frac{\partial w_\ell}{\partial x} + \lambda_{\ell+} \frac{\partial w_\ell}{\partial y}}{1 - i\lambda_{\ell+}} = F_\ell, \quad \ell = 1, \dots, m.$$

Wegen der Identität

$$\frac{a + \lambda_{\ell+} b}{1 - i\lambda_{\ell+}} = \frac{1}{2}(a + ib) + \frac{1 + i\lambda_{\ell+}}{1 - i\lambda_{\ell+}} \cdot \frac{1}{2}(a - ib), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

folgt für $a := \frac{\partial w_\ell}{\partial x}$, $b := \frac{\partial w_\ell}{\partial y}$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_\ell}{\partial x} + i \frac{\partial w_\ell}{\partial y} \right) + \frac{1 + i\lambda_{\ell+}}{1 - i\lambda_{\ell+}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_\ell}{\partial x} - i \frac{\partial w_\ell}{\partial y} \right) = F_\ell, \quad \ell = 1, \dots, m,$$

also

$$\frac{\partial w_\ell}{\partial \bar{z}} + Q_\ell \frac{\partial w_\ell}{\partial z} = 0, \quad \ell = 1, \dots, m, \quad \text{mit } Q_\ell := \frac{1 + i\lambda_{\ell+}}{1 - i\lambda_{\ell+}}, \quad |Q_\ell| < 1.$$

Wie in der Vorlesung (zu $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$ gibt es ein System $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ so, daß $\mathbf{p}_k \mathbf{q}_\ell = \delta_{k\ell}$ für $1 \leq k, \ell \leq m$ und $\sum_{\ell=1}^m p_\ell^{(\rho)} q_\ell^{(\tau)} = \delta_{\rho\tau}$, $1 \leq \rho, \tau \leq m$) folgt die Darstellung von \mathbf{u} ("Rücktransformation")

$$\mathbf{u}(x, y) = \sum_{\ell=1}^m w_\ell(x, y) \mathbf{q}_\ell(x, y).$$

Die Funktion $F_\ell = F_\ell(x, y, \mathbf{w})$ ist damit für $\ell = 1, \dots, m$ definiert durch

$$F_\ell(x, y) = \frac{1}{1 - i\lambda_{\ell+}(x, y)} \left\{ - \left(\mathbf{p}_{\ell+}^\top A^{-1} \right) (x, y) \cdot \mathbf{f} \left(x, y, \sum_{\ell=1}^m w_\ell(x, y) \mathbf{q}_\ell(x, y) \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\ell+}^\top}{\partial x} (x, y) + \lambda_{\ell+}(x, y) \frac{\partial \mathbf{p}_{\ell+}^\top}{\partial y} (x, y) \right) \cdot \sum_{\ell=1}^m w_\ell(x, y) \mathbf{q}_\ell(x, y) \right\}.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte) Wir betrachten ein quasilineares hyperbolisches System

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{F} \in (C^1(\mathbb{R}))^n. \quad (7.0.1)$$

Eine *i-Riemann-Invariante* des Systems (7.0.1) ist eine glatte, skalare Funktion w mit

$$\nabla w(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_i(\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{O}.$$

a) Das sogenannte p – System

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p(u)}{\partial x} = 0$$

beschreibt die eindimensionale Strömung eines isentropen Gases in Lagrangeschen Koordinaten, wobei u die Geschwindigkeit, v das spezifische Volumen und $p = p(v)$ der Druck ist mit $p'(v) < 0$. Geben Sie für dieses System 1- und 2-Riemann-Invarianten an.

b) Verfahren Sie ebenso mit den Gleichungen der eindimensionalen Strömung eines polytropen Gases, wobei ρ die Dichte und v die Geschwindigkeit ist:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + \kappa \rho^\gamma) = 0.$$

c) Das System (7.0.1) hat ein *Koordinatensystem von Riemann-Invarianten*, falls es n Funktionen w_1, \dots, w_n auf \mathcal{O} gibt mit der Eigenschaft, daß für alle i und $j = 1, \dots, n$ mit $i \neq j$ w_j eine i -Riemann-Invariante von (7.0.1) ist. Zeigen Sie, daß die integrable Normalform eines Systems (7.0.1) mit einem Koordinatensystem von Riemann-Invarianten wie folgt lautet:

$$\frac{\partial w}{\partial i} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

d) Hat jedes System (7.0.1) ein Koordinatensystem von Riemann-Invarianten ?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5

a) Die Funktionalmatrix des Systems lautet

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ p'(u) & 0 \end{bmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $\lambda^2 + p'(u) = 0$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -\sqrt{-p'(u)}$, $\lambda_2 = \sqrt{-p'(u)}$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\mathbf{r}_1 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-p'(u)}} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-p'(u)}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für \mathbf{r}_1 folgt die Riemann-Invariante aus

$$-\frac{1}{\sqrt{-p'(u)}} \frac{\partial w_1}{\partial u} - \frac{\partial w_1}{\partial v} = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$w_1(u, v) = - \int_{u_0}^u \sqrt{-p'(s)} ds + v.$$

Analog folgt

$$w_2(u, v) = - \int_{u_0}^u \sqrt{-p'(s)} ds - v.$$

b) Mit $U := \rho$, $V := \rho v$ lautet das System

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{U} + \kappa U^\gamma \right) = 0$$

mit der Funktionalmatrix bzw. dem charakteristischen Polynom

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{V^2}{U^2} + \kappa\gamma U^{\gamma-1} & 2\frac{V}{U} \end{bmatrix}; \quad (-\lambda) \left(2\frac{V}{U} - \lambda \right) + \frac{V^2}{U^2} - \kappa\gamma U^{\gamma-1} = 0,$$

also

$$\lambda_1 = \sqrt{\kappa\gamma} U^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{V}{U}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\kappa\gamma} U^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{V}{U}.$$

Die Komponenten der Eigenvektoren folgen aus dem System

$$\begin{bmatrix} \mp\sqrt{\kappa\gamma} U^{\frac{\gamma-1}{2}} - \frac{V}{U} & 1 \\ -\frac{V^2}{U^2} + \kappa\gamma U^{\gamma-1} & \mp\sqrt{\kappa\gamma} U^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{V}{U} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{i,1} \\ p_{i,2} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2;$$

somit gilt

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\kappa\gamma} U^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{V}{U} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\kappa\gamma} U^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{V}{U} \end{pmatrix}.$$

Die Riemann-Invariante folgt aus

$$\frac{\partial w_1}{\partial u} + \left(\pm\sqrt{\kappa\gamma} U^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{V}{U} \right) \frac{\partial w_1}{\partial v} = 0.$$

Wir erhalten (beispielsweise) folgende Lösungen:

$$w_1 = \frac{V}{U} - \frac{2(\kappa\gamma)^{1/2}}{\gamma-1} U^{\frac{\gamma-1}{2}} = v - \frac{2(\kappa\gamma)^{1/2}}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

$$w_2 = \frac{V}{U} + \frac{2(\kappa\gamma)^{1/2}}{\gamma-1} U^{\frac{\gamma-1}{2}} = v + \frac{2(\kappa\gamma)^{1/2}}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

c) Das System schreiben wir als

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0.$$

Wir schreiben nun $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ als Linearkombination der Eigenvektoren \mathbf{r}_1 bis \mathbf{r}_n von $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u})$:

$$\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{r}_n = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (7.0.2)$$

$$\beta_1 \mathbf{r}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{r}_n = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}. \quad (7.0.3)$$

Damit lautet das System

$$\sum_{i=1}^n n(\alpha_i \mathbf{r}_i + \lambda_i \beta_i \mathbf{r}_i) = 0. \quad (7.0.4)$$

Multiplizieren wir von links mit ∇w_j und beachten wir, daß die Funktionen w_1 bis w_n genau dann ein Koordinatensystem von Riemann-Invarianten bilden, wenn gilt:

$$\nabla w_j(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_i(\mathbf{u}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j, \\ \neq 0 & \text{falls } i = j, \end{cases} \quad (*)$$

so folgen aus (7.0.4) die Gleichungen

$$\alpha_j \nabla w_j(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_j(\mathbf{u}) + \lambda_j \beta_j \nabla w_j(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_j(\mathbf{u}) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.0.5)$$

Multiplizieren wir andererseits (7.0.2) bzw. (7.0.3) mit $\nabla w_j(\mathbf{u})$, so folgt

$$\begin{aligned} \alpha_j \nabla w_j(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_j(\mathbf{u}) &= \nabla w_j(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial w_j(\mathbf{u})}{\partial t}, \\ \beta_j \nabla w_j(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_j(\mathbf{u}) &= \nabla w_j(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial w_j(\mathbf{u})}{\partial x}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (7.0.5) ein, so folgt die nachzuweisende Gleichung

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

- d) Nein. Jedes System von zwei Erhaltungsgleichungen mit zwei Unbekannten hat zwar ein Koordinatensystem von Riemann-Invarianten. Für $n \geq 3$ sind die $n(n-1)$ Gleichungen (*) für die n gesuchten Funktionen w_1, \dots, w_n jedoch im allgemeinen überbestimmt.

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (6 Punkte) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$u_y - v_x = 0, \quad (y^2 - x)u_x + yu_y + yv_x + v_y + u = 0.$$

- a) Untersuchen Sie den Typ des Systems.
- b) Im Falle der Hyperbolizität bestimmen Sie die nicht integrable Normalform.
- c) Bestimmen Sie dann die integrable Normalform.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 Das System kann in der Form

$$A\mathbf{u}_x + B\mathbf{u}_y + \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{u} = (u, v) \tag{7.0.1}$$

geschrieben werden mit

$$A = A(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ y^2 - x & y \end{bmatrix}, \quad B = B(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y; u) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\lambda A - B = \begin{bmatrix} -1 & -\lambda \\ \lambda(y^2 - x) - y & \lambda y - 1 \end{bmatrix};$$

$$\det(\lambda A - B) = 1 - \lambda y + (y^2 - x)\lambda^2 - y\lambda = (y^2 - x)\lambda^2 - 2y\lambda + 1.$$

Im folgenden betrachten wir $y^2 - x \neq 0$; dann

$$\lambda_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - (y^2 - x)}}{y^2 - x} = \frac{y \pm \sqrt{x}}{y^2 - x}.$$

Fall 1: Sei $x < 0$, dann $\Delta < 0$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Das Supremum ist elliptisch.

Fall 2: Für $x = 0$ ist $\lambda_{1,2} = 1/y$ für $y \neq 0$. Das System ist parabolisch, falls es zu diesem Eigenwert genau einen Eigenvektor gibt (wird gleich gezeigt).

Fall 3: Für $x > 0$ sind $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 = \frac{1}{y - \sqrt{x}}$, $\lambda_2 = \frac{1}{y + \sqrt{x}}$. Das System ist hyperbolisch.

Es gilt

$$\lambda_1 A - B = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{y - \sqrt{x}} \\ \sqrt{x} & \frac{y}{y - \sqrt{x}} - 1 \end{bmatrix}.$$

Der Eigenvektor \mathbf{p}_1 ergibt sich aus der Gleichung für $\mathbf{p}_1^\top(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(x, y))^\top$:

$$(\alpha \quad \beta)(\lambda_1 A - B) = (0 \quad 0)$$

mit der Lösung $\beta(x, y) = 1$, $\alpha(x, y) = \sqrt{x}$, also $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ 1 \end{pmatrix}$. Analog erhalten wir

$$\lambda_2 A - B = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{y+\sqrt{x}} \\ -\sqrt{x} & \frac{y}{y+\sqrt{x}} - 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_2(x,y) = \begin{pmatrix} \gamma(x,y) \\ \delta(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Offenbar sind \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 linear unabhängig. Um die nicht integrable Normalform zu bestimmen, multiplizieren wir (7.0.1) mit \mathbf{p}_1^\top bzw. \mathbf{p}_2^\top und erhalten $\mathbf{p}_\ell^\top A \mathbf{u}_x + \mathbf{p}_\ell^\top B \mathbf{u}_y + \mathbf{p}_\ell^\top \mathbf{f} = 0$, $\ell = 1, 2$.

Aus $\mathbf{p}_\ell^\top (\lambda_\ell A - B) = 0$ folgt $\mathbf{p}_\ell^\top B = \mathbf{p}_\ell^\top \lambda_\ell A$ und damit

$$\mathbf{p}_\ell^\top A (\mathbf{u}_x + \lambda_\ell \mathbf{u}_y) + \mathbf{p}_\ell^\top \mathbf{f} = 0, \quad \ell = 1, 2.$$

Durch Einführung von $\frac{\partial}{\partial \gamma_\ell} := \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_\ell \frac{\partial}{\partial y}$, $\ell = 1, 2$ folgt die nicht integrable Normalform

$$\mathbf{p}_\ell^\top A \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \gamma_\ell} + \mathbf{p}_\ell^\top \mathbf{f} = 0, \quad \ell = 1, 2. \quad (*)$$

Ausgeschrieben lautet (*) wie folgt:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} \quad 1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ y^2 - x & y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x + \lambda_1 u_y \\ v_x + \lambda_1 v_y \end{pmatrix} + (\sqrt{x} \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} &= 0 \quad (\ell = 1), \\ (\sqrt{x} \quad -1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ y^2 - x & y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x + \lambda_2 u_y \\ v_x + \lambda_2 v_y \end{pmatrix} + (\sqrt{x} \quad -1) \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} &= 0 \quad (\ell = 2), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (y^2 - x) \left(u_x + \frac{1}{y - \sqrt{x}} u_y \right) + (y - \sqrt{x}) \left(v_x + \frac{1}{y - \sqrt{x}} v_y \right) + u &= 0, \\ -(y^2 - x) \left(u_x + \frac{1}{y + \sqrt{x}} u_y \right) - (y + \sqrt{x}) \left(v_x + \frac{1}{y + \sqrt{x}} v_y \right) - u &= 0. \end{aligned}$$

Um die integrable Normalform zu bestimmen, benötigen wir Vektoren

$$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y - x^2 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $\mathbf{p}_k^\top \mathbf{q}_\ell = \delta_{k\ell}$, $k, \ell = 1, 2$. Die Lösung dieser vier Bestimmungsgleichungen lautet hier

$$\mathbf{q}_1(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieser Funktionen führen wir nun die Funktion $\mathbf{U} := (U_1, U_2)$ wie folgt ein: $U_\ell(x, y) := (\mathbf{p}_\ell^\top A \mathbf{u})(x, y)$, $\ell = 1, 2$. Wir erhalten hier

$$U_1(x, y) = (y^2 - x) u(x, y) + (y - \sqrt{x}) v(x, y), \quad U_2(x, y) = -(y^2 - x) u(x, y) - (y + \sqrt{x}) v(x, y).$$

Es gilt die Rücktransformation

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U_1 A^{-1} \mathbf{q}_1 + U_2 A^{-1} \mathbf{q}_2.$$

Mit den Funktionen U_1 und U_2 folgt

$$\frac{\partial U_\ell}{\partial \gamma_\ell} = \frac{\partial U_\ell}{\partial \gamma_\ell} (\mathbf{p}_\ell^\top A \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial \gamma_\ell} (\mathbf{p}_\ell^\top A) \mathbf{u} + \mathbf{p}_\ell^\top A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \gamma_\ell}, \quad \ell = 1, 2.$$

Aus der (nicht integrierbaren) Normalform folgt $\mathbf{p}_\ell^\top A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \gamma_\ell} = -\mathbf{p}_\ell^\top \mathbf{f}$, $\ell = 1, 2$ und damit

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial \gamma_\ell} = \frac{\partial}{\partial \gamma_\ell} (\mathbf{p}_\ell^\top A) \left(\sum_{j=1}^2 U_j A^{-1} \mathbf{q}_j \right) - \mathbf{p}_\ell^\top \mathbf{f}, \quad \ell = 1, 2.$$

Im vorliegenden Fall erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^\top A &= (y^2 - x, y - \sqrt{x}), \\ \frac{\partial}{\partial \gamma_1} (\mathbf{p}_1^\top A) &= \left(\frac{y + \sqrt{x}}{y - \sqrt{x}}, \frac{3\sqrt{x} - y}{2\sqrt{x}(y - \sqrt{x})} \right), \\ \mathbf{p}_2^\top A &= (-(y^2 - x), -(y + \sqrt{x})), \\ \frac{\partial}{\partial \gamma_2} (\mathbf{p}_2^\top A) &= \left(\frac{\sqrt{x} - y}{y + \sqrt{x}}, -\frac{y + 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(y + \sqrt{x})} \right), \\ A^{-1} \mathbf{q}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}(y - \sqrt{x})} \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}, \\ A^{-1} \mathbf{q}_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}(y + \sqrt{x})} \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p}_1^\top \mathbf{f} &= (\sqrt{x}, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = u = \sum_{\ell=1}^2 U_\ell A^{-1} \mathbf{q}_\ell, \\ \mathbf{p}_2^\top \mathbf{f} &= (\sqrt{x}, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = -u = \sum_{\ell=1}^2 U_\ell A^{-1} \mathbf{q}_\ell. \end{aligned}$$

Wegen der hier vorliegenden Form von $\mathbf{p}_\ell^\top \mathbf{f}$ folgt:

$$\frac{\partial U_\ell}{\partial \gamma_\ell} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \gamma_\ell} (\mathbf{p}_\ell^\top A) + (-1)^\ell \mathbf{p}_\ell^\top \right)}_{=: \alpha_\ell} \sum_{j=1}^2 (U_j A^{-1} \mathbf{q}_j), \quad \ell = 1, 2,$$

also

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, y) &= \left(\frac{y + \sqrt{x}}{y - \sqrt{x}}, \frac{3\sqrt{x} - y}{2\sqrt{x}(y - \sqrt{x})} \right) - (\sqrt{x}, 1), \\ \alpha_2(x, y) &= \left(\frac{\sqrt{x} - y}{y + \sqrt{x}}, -\frac{y + 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(y + \sqrt{x})} \right) - (\sqrt{x}, -1). \end{aligned}$$

Mit

$$\sum_{j=1}^2 U_j A^{-1} \mathbf{q}_j = U_1 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}(y-\sqrt{x})} \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} + U_2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}(y+\sqrt{x})} \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}$$

folgt die integrable Normalform

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial \gamma_1} &= \frac{\alpha_1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}(y-\sqrt{x})} \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} U_1 + \frac{\alpha_1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}(y+\sqrt{x})} \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} U_2, \\ \frac{\partial U_2}{\partial \gamma_2} &= \frac{\alpha_2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}(y-\sqrt{x})} \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} U_1 + \frac{\alpha_2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}(y+\sqrt{x})} \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} U_2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte) Stationäre wirbelfreie ebene isentrope Gasströmungen werden durch folgendes System für die Geschwindigkeit $\mathbf{u} = (u, v)$ beschrieben:

$$u_y - v_x = 0, \quad u_x(a^2 - u^2) - uv(u_y + v_x) + v_y(a^2 - v^2) = 0,$$

wobei die lokale Schallgeschwindigkeit a durch

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2}(u^2 + v^2)$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet a_0 die Ruheschallgeschwindigkeit (bei Luft: $a_0 \approx 300\text{m/s}$), und κ den Adiabatenexponenten (bei Luft: $\kappa \approx 1.4$). Im Sonderfall $a^2 = u^2 = 0$ heißt $a_* = |v|$ "kritische Geschwindigkeit". Untersuchen Sie den Typ des Systems.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 Das System kann mit $\mathbf{u} = (u, v)$, $\mathbf{u}_x = (u_x, v_x)$, $\mathbf{u}_y = (u_y, v_y)$ in der Form $A\mathbf{u}_x + B\mathbf{u}_y = 0$ geschrieben werden, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a^2 - u^2 & -uv \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -uv & a^2 - v^2 \end{bmatrix}.$$

Man rechnet leicht aus:

$$\begin{aligned} \det(\lambda A - B) &= (a^2 - u^2)\lambda^2 + 2uv\lambda + a^2 - v^2, \\ \det(A - \mu B) &= (a^2 - v^2)\mu^2 + 2uv\mu + a^2 - u^2. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die Gleichung $\det(\lambda A - B) = 0$.

Fall 1: $a^2 - u^2 \neq 0$; dann gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-uv \pm \sqrt{u^2v^2 - (a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}}{a^2 - u^2} = \frac{-uv \pm \sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{a^2 - u^2}.$$

1.1. Ist $\Delta := u^2 + v^2 - a^2 < 0$, also $u^2 + v^2 < a^2$, so gilt $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$; dies ist ein elliptisches System (Unterschallströmung).

1.2. Ist $\Delta > 0$, so sind $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, und es liegt ein hyperbolisches System vor (Überschallströmung).

1.3. Ist $\Delta = 0$, dann $u^2 + v^2 = a^2$ und $v^2 = a^2 - u^2 \neq 0$. Dann ist $\lambda = -\frac{uv}{a^2 - u^2} = -\frac{uv}{v^2} = -\frac{u}{v}$ doppelter Eigenwert. Die Eigenvektoren ergeben sich aus $p^\top(\lambda A - B) = 0$ mit $\lambda = -u/v$. Ein Eigenvektor ist dann z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das System ist parabolisch.

Fall 2: $a^2 - u^2 = 0$. Wir ermitteln den Typ des Systems aus der Gleichung $\det(A - \mu B) = 0$. Diese Gleichung führt auf $((a^2 - v^2)\mu + 2uv)\mu = 0$. $\mu = 0$ ist ein Eigenwert.

2.1. Ist $uv \neq 0$, dann $(a^2 - v^2)\mu = -2uv \neq 0 \Rightarrow a^2 - v^2 \neq 0 \Rightarrow \mu_2 = -\frac{2uv}{a^2 - v^2}$. Wegen $\mu_1 \neq \mu_2$ liegt ein hyperbolisches System vor.

2.2. Sei $uv = 0$.

a) Sei $u = 0$, $v \neq 0$. Aus $a^2 - u^2 = 0$ folgt $a = 0$ und damit aus

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2}(u^2 + v^2) : \quad |v| = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} = a_*$$

Aus $((a^2 - v^2)\mu + 2uv)\mu = 0$ folgt $-v^2\mu_2 + 2 \cdot 0 \cdot v = 0$, also $\mu_2 = \mu_1 = 0$. Der doppelte Eigenwert $\mu = 0$ hat einen einzigen Eigenvektor, und das System ist parabolisch.

b) Sei $u \neq 0$, $v = 0$. Es folgt $u^2 = a^2 = a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2}(u^2 + 0^2) \Rightarrow u = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}}$. Dies ist eine transsonische Strömung mit $a^2\mu_2 = 0$, also $\mu_2 = \mu_1 = 0$. Das System ist wiederum parabolisch.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Beweisen Sie die Behauptungen des O. Perronschen Beispiels in § 5.3.2.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 (Die Lösung dieser Aufgabe übernehmen wir hier aus G. Hellwig, *Partial Differential Equations*, Teubner Verlag, Stuttgart 1977; Abschnitt 3.2, pp. 83–85.)

Die Typklassifizierung rechnet man leicht nach.

(1) Ist $a > 0$, dann folgt die Notwendigkeit von $f \in C^0$ trivialerweise aus dem System. Wir überführen das System

$$\begin{cases} \ell^1 \equiv u_x - u_y - v_y = 0, & u(0, y) = 0, \\ \ell^2 \equiv au_y - v_x - v_y + f(x + y) = 0, & v(0, y) = 0, \\ a = \text{const.} \end{cases} \quad (*)$$

in die Normalform. Sei $\tilde{\ell}^1 := \sqrt{a}\ell^1 + \ell^2$, $\tilde{\ell}^2 := -\sqrt{a}\ell^1 + \ell^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}^1 &\equiv \sqrt{a} u_x + (a - \sqrt{a}) u_y - \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} v_x + (a - \sqrt{a}) v_y) + f(x+y) = 0, \\ \tilde{\ell}^2 &\equiv -\sqrt{a} u_x + (a - \sqrt{a}) u_y + \frac{1}{\sqrt{a}} (-\sqrt{a} v_x + (a + \sqrt{a}) v_y) + f(x+y) = 0.\end{aligned}$$

Die charakteristischen Richtungsableitungen sind gegeben durch

$$\alpha = (\sqrt{a}, a - \sqrt{a}), \quad \tilde{\alpha} = (-\sqrt{a}, a + \sqrt{a}). \quad (**)$$

Mit den Funktionen

$$U := u - \frac{v}{\sqrt{a}}, \quad V := u + \frac{v}{\sqrt{a}}$$

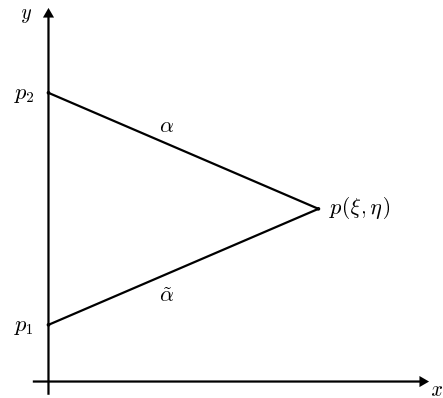
folgt die Normalform

$$\begin{aligned}U_\alpha + f(x+y) &= 0, \\ V_{\tilde{\alpha}} + f(x+y) &= 0\end{aligned} \quad (\boxplus)$$

mit den Anfangsbedingungen $U(0,y) = 0$, $V(0,y) = 0$. Wir suchen nun die Lösung an der Stelle ξ, η und betrachten die charakteristischen Kurven durch ξ, η , die natürlich $(**)$ entsprechen müssen:

$$\begin{aligned}\alpha: \quad x &= \sqrt{a} t + \xi, & y &= (a - \sqrt{a}) t + \eta, \\ \tilde{\alpha}: \quad x &= -\sqrt{a} \tau + \xi, & y &= (a + \sqrt{a}) \tau + \eta.\end{aligned}$$

Zu den Punkten p_1, p_2 und p in der Skizze gehören die Parameterkurve $t = -\frac{\xi}{\sqrt{a}}$, $\tau = \frac{\xi}{\sqrt{a}}$, $t = \tau = 0$. Ferner werden aus U_α und $V_{\tilde{\alpha}}$ in (\boxplus) U_t und V_τ , und Integration entlang $\alpha, \tilde{\alpha}$ und Beachtung der Anfangsbedingungen liefert



$$\begin{aligned}U(\xi, \eta) &= - \int_{-\xi/\sqrt{a}}^0 f(\sqrt{a} t + \xi + (a - \sqrt{a}) t + \eta) dt = -\frac{1}{a} \int_{\xi+\eta-\sqrt{a}\xi}^{\xi+\eta} f(z) dz, \\ V(\xi, \eta) &= - \int_{\xi/\sqrt{a}}^0 f(-\sqrt{a} \tau + \xi + (a + \sqrt{a}) \tau + \eta) d\tau = -\frac{1}{a} \int_{\xi+\eta+\sqrt{a}\xi}^{\xi+\eta} f(z) dz.\end{aligned}$$

Hieraus erhält man schließlich

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \frac{1}{2a} \int_{x+y}^{x+y+\sqrt{a}x} f(z) dz + \frac{1}{2a} \int_{x+y}^{x+y-\sqrt{a}x} f(z) dz, \\ v(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_{x+y-\sqrt{a}x}^{x+y+\sqrt{a}x} f(z) dz,\end{aligned}$$

was den Beweis abschließt, denn offensichtlich ist $f \in C^0$ eine hinreichende Bedingung für die Wohldefiniertheit von $u(x,y)$ und $v(x,y)$.

- (2) Ist $a = 0$, so führen wir neue Koordinaten $\xi = x$, $\eta = x + y$ ein. Dann nimmt das System (*) die Form

$$u_\xi - v_\eta = 0, \quad v_\xi = f(\eta); \quad u(0, \eta) = 0, \quad v(0, \eta) = 0$$

an. Integration der letzten Gleichung liefert $v(\xi, \eta) = \xi f(\eta)$. Aus der ersten Gleichung folgt $u(\xi, \eta) = \frac{\xi^2}{2} f'(\eta)$ und schließlich

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} f'(x + y), \quad v(x, y) = x f(x + y),$$

woraus sich das gewünschte Ergebnis ablesen läßt.

- (3) Wir betrachten den Fall $a = -b^2$ mit $b > 0$.

- (a) Wir zeigen, daß die Analytizität von $f(x + y)$ notwendig ist. Hierzu führen wir neue Koordinaten $\xi := bx$, $\eta := x + y$ und neue Funktionen

$$U := bu - \frac{1}{b} \int_0^\eta f(t) dt, \quad V = v$$

ein. Nach einer kurzen Rechnung erhalten wir für U und V das Problem

$$U_\xi - V_\eta = 0, \quad U_\eta + V_\xi = 0; \quad U(0, \eta) = -\frac{1}{b} \int_0^\eta f(t) dt, \quad V(0, \eta) = 0. \quad (*)$$

Das System ist in die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen überführt worden. Damit ist $F(\zeta) = U + iV$ eine analytische Funktion in $\zeta = \xi + i\eta$ für $\xi \neq 0$, die gegen $-\frac{1}{b} \int_0^\eta f(t) dt$ für $\xi \rightarrow 0$ konvergieren sollte. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip (Analysis III) folgt, daß f analytisch sein muß.

- (b) Wir zeigen nun, daß die Analytizität von $f(x + y)$ hinreichend ist. Die eindeutige Lösung des Systems

$$u_{3x} = u_{4y}, \quad u_{4x} = 0 \quad \text{mit} \quad u_3(0, y) = 0, \quad u_4(0, y) = y$$

ist offenbar gegeben durch $u_3 = x$, $u_4 = y$. Setzen wir $u = u_1$, $v = u_2$, dann kann (*) auf die Form

$$\begin{aligned} u_{1x} &= u_{1y} + u_{2y}, & u_{2x} &= au_{1y} + u_{2y} + f(u_3 + u_4) u_{4y}, \\ u_{3x} &= u_{4y}, & u_{4x} &= 0 \end{aligned}$$

mit $u_i(0, y) = 0$, $i = 1, 2, 3$, $u_4(0, y) = y$ gebracht werden.

Der Existenzsatz von Cauchy-Kowalewski liefert nun das gewünschte Ergebnis.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Für das Strömungspotential $\varphi(x, y)$ stationärer ebener Gasströmungen gilt die Differentialgleichung

$$(a^2 - (\varphi_x)^2) \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (a^2 - (\varphi_y)^2) \varphi_{yy} = 0$$

mit

$$a^2 = \frac{k-1}{2} (w_m^2 - w^2), \quad w^2 = (\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2, \quad k = \text{const.} \neq 1, \quad w \leq w_m$$

und der Maximalgeschwindigkeit w_m .

- a) Prüfen Sie, ob es in einer Umgebung des Nullpunktes $x = 0$, $y = 0$ für analytische Vorgaben $\varphi(x,0) = f(x)$, $\varphi_y(x,0) = 0$ eine Lösung gibt.
- b) Unter Vernachlässigung der Änderung von a^2 berechne man die Reihenentwicklung um den Nullpunkt für die Vorgaben $\varphi_x(x,0) = a + cx$, $\varphi_y(x,0) = 0$ mit $a > 0$, $c > 0$, bis zu den Gliedern vierter Ordnung. Man gebe den Verlauf der Stromlinien in der Umgebung des Nullpunktes an und bestimme unter Berücksichtigung der Glieder bis zur zweiten Ordnung den Verlauf der Schallgrenze (wo $(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2 = a^2$ gilt).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

- a) Die Anfangskurve ist in $(0,0)$ nicht charakteristisch, denn

$$F_t(x')^2 - F_s x' y' + F_r (y')^2 = a^2 - \varphi_y^2 \neq 0$$

wegen $\varphi_y(x,0) = 0$ und $a \neq 0$, falls $w_m^2 \neq f^2(x)$. Die Differentialgleichung muß nach φ_{yy} aufgelöst werden:

$$\varphi_{yy} = -\frac{1}{a^2 - \varphi_y^2} \{ (a^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} \}.$$

Wegen $\varphi_y(x,0) = 0$ und $a \neq 0$ ist die rechte Seite in einer Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ analytisch. Da die Anfangskurve analytisch ist, und die Vorgabe $\varphi_x(x,0) = f(x)$ analytisch vorausgesetzt werde, gibt es nach dem Existenzsatz von Cauchy-Kowalewski in einer Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ eine Lösung, die in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar ist.

- b) Für die Reihenentwicklung erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi_{yy} &= \frac{2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} - (a^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx}}{(a^2 - \varphi_y^2)}, \\ \varphi_{yyx} &= \frac{1}{a^2 - \varphi_y^2} \left\{ 2 \left[\varphi_{xx} \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_x \varphi_{xy}^2 + \varphi_x \varphi_y \varphi_{xxy} - (a^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xxx} + 2\varphi_x \varphi_{xx}^2 \right] \right\} \\ &\quad + 2\varphi_y \varphi_{xy} \frac{2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} - (a^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx}}{a^2 - \varphi_y^2}, \\ \varphi_{yyy} &= \frac{1}{a^2 - \varphi_y^2} \left\{ 2 \left[\varphi_y \varphi_{xy}^2 + \varphi_x \varphi_{yy} \varphi_{xy} + \varphi_x \varphi_y \varphi_{xyy} - (a^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xxy} + 2\varphi_x \varphi_{xy} \varphi_{xx} \right] \right\} \\ &\quad + 2\varphi_y \varphi_{yy} \frac{2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} - (a^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx}}{(a^2 - \varphi_y^2)^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x,0) &= a + cx, & \varphi_y(x,0) &= 0; \\
\varphi_{xx}(x,0) &= c, & \varphi_{yy}(x,0) &= \frac{c^2}{a^2} x(2a + cx); \\
\varphi_{xxx}(x,0) &= 0, & \varphi_{xxy}(x,0) &= 0, & \varphi_{xyy}(x,0) &= \frac{2c^2}{a^2}(a + cx), & \varphi_{yyy}(x,0) &= 0; \\
\varphi_x(0,0) &= a; \\
\varphi_y(0,0) &= \varphi_{xx} = \varphi_{xy} = \varphi_{yy} = \varphi_{xxx} = \varphi_{xxy} = 0; \\
\varphi_{xyy}(0,0) &= \frac{2c^2}{a}; \\
\varphi_{yyy}(0,0) &= 0; \\
\varphi_{xxxx}(x,0) &= \varphi_{yxxx}(x,0) = 0; \\
\varphi_{yyxx}(x,0) &= \frac{2c^3}{a^2}; \\
\varphi_{yyyx}(x,0) &= 0; \\
\varphi_{xxxx}(0,0) &= \varphi_{yxxx}(0,0) = 0; \\
\varphi_{yyyx}(0,0) &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{yyxx}(0,0) &= \frac{2c^3}{a^2}; \\
\varphi_{yyyy}(x,0) &= -\frac{a^2 - \varphi_x^2}{a^2 - \varphi_y^2} \varphi_{xxyy}(x,0) + \frac{2\varphi_x \varphi_{xyy} \varphi_{xx}}{a^2 - \varphi_y^2}(x,0) \\
&= -\frac{a^2 - (a + cx)^2}{a^2} \varphi_{xxyy}(x,0) + \frac{2(a + cx)^2 \cdot 2c^3}{a^4}
\end{aligned}$$

und somit $\varphi_{yyyy}(0,0) = 4c^2/a^2$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_0 + ax + \frac{c}{2}x^2 + \frac{c^2}{a}xy^2 + \frac{1}{2} \frac{c^3}{a^2}x^2y^2 + \frac{1}{3!} \frac{c^3}{a^2}y^4 + \dots, \\
\varphi_x &= a + cx + \frac{c^2}{a}y^2 + \frac{c^3}{a^2}xy^2 + \dots, \\
\varphi_y &= 2\frac{c^2}{a}xy + \frac{c^3}{a^2}x^2y + \frac{2}{3} \frac{c^3}{a^2}y^3 + \dots
\end{aligned}$$

Für die Stromlinien gilt daher in Näherung

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\varphi_y}{\varphi_x} &= 2\frac{c^2}{a^2} \frac{xy}{(a + cx + (c^2/a)y^2)} \Big|_{(0,y_0)} = 0, \\
y'' &= \frac{2c^2}{a} \left\{ \frac{y + xy'}{\dots} - \frac{xy}{(\dots)^2} (\dots)' \right\} \Big|_{(0,y_0)} = \frac{2c^2}{a^2} y_0
\end{aligned}$$

und somit

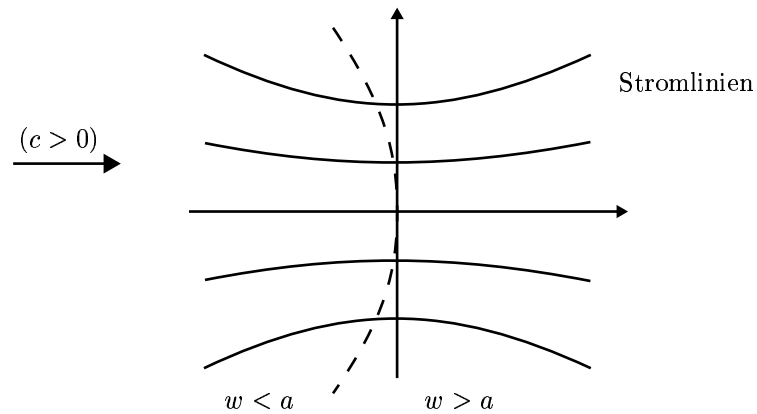
$$y(x) = y_0 \left(1 + \frac{c^2}{a^2} x^2 + \dots \right).$$

Berücksichtigt man für die Schallgrenze nur Glieder zweiter Ordnung, so gilt

$$\begin{aligned} \left(a + cx + \frac{c^2}{a^2} y^2 \right)^2 + \left(\frac{2c^2}{a} xy \right)^2 &= a^2, \\ c^2 x^2 + 2c^2 y^2 + 2acx &= 0, \\ x^2 + 2y^2 + \frac{2a}{c} x &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine Ellipse mit Werten bei $x \leq 0$. Vernachlässigt man die y -Komponente der Geschwindigkeit, so erhält man die Parabel

$$\left(a + cx + \frac{c^2}{a} y \right)^2 = a^2, \quad \text{also} \quad y = -\frac{a}{c} x.$$



Aufgabe 5 (6 Punkte) Beweisen Sie das zweite Hopfsche Lemma 6.1.7.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5 Sei $P = (x_0, y_0)$ der Randpunkt, an welchem das Maximum angenommen wird. Wir betrachten die Kreisscheibe K_1 um einen Punkt $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{G}$ mit Radius r_1 , wobei \tilde{x}, \tilde{y} und $r_1 > 0$ so gewählt seien, daß $P \in \partial K_1$ gilt. Ferner sei K_2 die Kreisscheibe um P mit Radius $r_1/2$. Wir definieren nun die Hilfsfunktion

$$h(x, y) := \exp(-\alpha [(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2]) - \exp(-\alpha r_1^2),$$

wobei α so groß gewählt sei, daß $Lh > 0$ in K_2 gilt (hier wird die zusätzliche Voraussetzung für den Fall, daß P ein parabolischer Punkt ist, benötigt). Dann betrachten wir die Funktion $v = u + \varepsilon \cdot h$. Nach dem ersten Hopfschen Lemma gilt: Ist $u \neq M$, dann $u < M$ auf $\overline{K_1} \setminus P$. Wir beachten ferner, daß $h = 0$ auf ∂K_1 gilt. Wir wählen nun ε so klein, daß $v \leq M$ auf dem innerhalb von K_1 liegenden Rand von K_2 gilt. Damit gilt $v \leq M$ auf dem gesamten Rand des schraffiert eingezeichneten Bereichs.

Da dort $Lv > 0$ gilt, wird das Maximum von v an P mit $v(P) = M$ angenommen. Daher gilt an P

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial n} > 0.$$

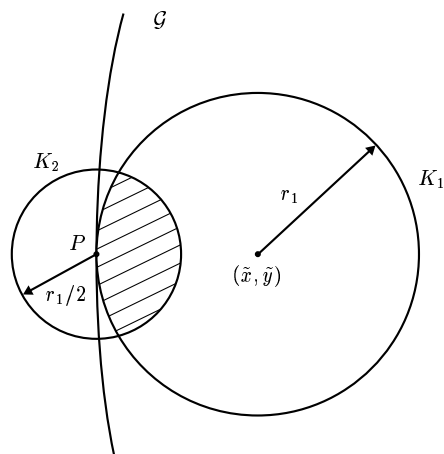
Wir zeigen nun, daß $\partial h / \partial n < 0$ an P gilt, d.h. $\partial u / \partial n > 0$. Wählen wir (\tilde{x}, \tilde{y}) als Ursprung unseres Koordinatensystems und r als euklidischen Abstand, so gilt $h = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha r_1^2}$; also

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -2\alpha x e^{-\alpha r^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -2\alpha y e^{-\alpha r^2}$$

und somit

$$\frac{\partial h}{\partial n} = -2\alpha e^{-\alpha r^2} (x n_1 + y n_2) < 0 \quad \text{und daher} \quad \frac{\partial u}{\partial n} > 0.$$

Das Beispiel $u_{xx} + \frac{y^2}{2} u_{yy} = 0$, $\overline{\mathcal{G}} := \{\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 1\}$ zeigt, daß die Voraussetzung für parabolische Randpunkte tatsächlich notwendig ist. Hier ist $y = 0$ eine Parabolizitätskurve. Eine Lösung ist $u = -y^2 \sin x + 1$. Dann ist $x = \frac{3\pi}{8}$, $y = 0$ ein positives Maximum, aber $\partial u / \partial n = 0$ dort. (Nach: G. Hellwig, *Partial Differential Equations*, B.G. Teubner, Stuttgart 1977, p. 93)



Literaturverzeichnis

- [1] AGARD Advisory Group for Aerospace Research and Development No.211: *Test Cases for Inviscid Flow Field Methods* Report of Fluid Dynamics Panel Working Group 07,1985.
- [2] Alber, H.: Geometrische Optik, geometrische Theorie der Beugung und ihre geschichtliche Entwicklung, Bonn, SFB 72 (1980) no. 10.
- [3] Ancona, F. und Marson, A.: A note on the Riemann problem for general $n \times n$ conservation laws. *J. Math. Analysis Appl.* **260** (2001) 279–293.
- [4] Ansorge, R. und Sonar, T.: Informationsverlust, abstrakte Entropie und die mathematische Beschreibung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Preprint **107**, Reihe A, *Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik*, 1996.
- [5] Arnold, D.N. und Brezzi, F.: Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, post-processing and error estimates. R.A.I.R.O. M2AN **19** (1985) 7–32.
- [6] Babovsky, H.: Die Boltzmann–Gleichung: Modellbildung — Numerik — Anwendungen. B.G. Teubner–Verlag, Stuttgart, 1998.
- [7] Becker, E. und Bürger, F.: *Kontinuumsmechanik*, B.G. Teubner–Verlag, Stuttgart, 1975.
- [8] Bers, Lipman: Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics III, *Surveys in Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [9] Boillat, G., Dafermos, C.M., Lax, P.D., Liu, T.P.: *Recent Mathematical Methods in Nonlinear Wave Propagation. Lecture Notes in Mathematics* **1640**, Springer–Verlag, Berlin 1996.
- [10] Bojarski, B.: Subsonic flow of compressible fluid, *Math. Probs. in Fluid Mech.*, Polish Academy of Sciences, Warschau 1967.
- [11] Bramble, J. und Hubbard, B.: On a finite difference analogue of an elliptic boundary problem which is neither diagonally dominant nor of non negative type, *J. Math. Phys.* **43** (1964) 117-132.
- [12] Brezis, H. und Stampacchia, G.: The hodograph method in fluid–dynamics in the light of variational inequalities, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **61** (1976) 1–18.
- [13] Bristeau, M.O. : Application of optimal control theory to transonic flow computations by finite element methods, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering.*, 1977, II, Lecture Notes in Physics **91**, Springer–Verlag (1979) 103-124.

-
- [14] Bristeau, M.O.: Application of a finite element method to transonic flow problems using an optimal control approach. In: *Computational Fluid Dynamics* (W. Kollmann ed.), McGraw Hill, New York (1980) 281-328.
- [15] Bristeau, M.O., Glowinski, R., Mandel, B., Periaux, J., Perrier, P. und Pironneau, O.: A finite element approximation of Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluids. Iterative methods of solution, *App. Meth. for Navier-Stokes Probl.* Lecture Notes in Physics **771**, Springer-Verlag, New York (1985) 78-128.
- [16] Bristeau, M.O., Glowinski, R., Periaux, J., Perrier, P., Pironneau, O., Poirier, G.: On the numerical solution of nonlinear problems in fluid dynamics by least squares and finite element methods. (II) *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **51** (1985) 363-482.
- [17] Bristeau, M.O., Glowinski, R., Periaux, J., Perrier, P., Pironneau, O. und Poirier, G.: Application of optimal control and finite element methods to the calculation of transonic flows and incompressible flows, in: *Num. Methods in Applied Fluid Dynamics*, (B. Hunt ed.) Academic Press, New York (1980) 203-312.
- [18] Bristeau, M.O., Glowinski, R., Periaux, J., Perrier, P., Pironneau, O. und Poirier, G.: Transonic flow simulations by finite elements and least squares methods, *Finite Elements in Fluids* **4** (R.H. Gallagher et al. eds.), Wiley, Chichester (1982) 453-482.
- [19] Bruhn, G.: Erhaltungssätze und schwache Lösungen in der Gasdynamik, *Math. Methods Appl. Sci.* **7** (1985) 470-479. (1985).
- [20] Bürger, R.: Ein Anfangs-Randwertproblem einer quasilinearen entarteten parabolischen Gleichung in der Theorie der Sedimentation mit Kompression. Dr.-Dissertation, Universität Stuttgart 1996.
- [21] Bürger, R., Karlsen, K.H., Risebro, N.H. and Towers, J.D.: Well-posedness in BV_t and convergence of a difference scheme for continuous sedimentation in ideal clarifier-thickener units. *Numer. Math.* **97** (2004) 25-65.
- [22] Bürger, R. und Wendland, W.L.: Entropy boundary and jump conditions in the theory of sedimentation with compression. *Math. Methods Appl. Sci.* **21** (1998) 865-882.
- [23] Bürger, R. und Wendland, W.L.: Existence, uniqueness and stability of generalized solutions of an initial boundary value problem for a degenerating parabolic equation. *J. Math. Anal. Appl.* **218** (1998) 207-239.
- [24] Bürger, R., Wendland, W.L. und Concha, F.: Modelling equations for Gravitational sedimentation-consolidation processes. *ZAMM* **80** (2000) 79-93.
- [25] Bustos, M.C.: On the existence and determination of discontinuous solutions to hyperbolic conservation laws in the theory of sedimentation. Dr.-Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt 1984.

- [26] Bustos, M.C., Concha, F., Wendland, W.L.: Global weak solutions to the problem of continuous sedimentation of an ideal suspension. *Math. Methods Appl. Sci.* **13** (1990) 1–22.
- [27] Bustos, M.C., Concha, F., Bürger, R. und Tory, E.M.: *Sedimentation and Thickening*. Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1999.
- [28] Cercignani, G.: *The Boltzmann Equation and its Applications*. Springer–Verlag Berlin, New York 1988.
- [29] Chakravarthy, S.R. und Osher, S.: A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. AIAA –85–0363 (1985).
- [30] Cheng, K.S.: Constructing solutions of a single conservation law. *J. Diff. Equ.* **49** (1983) 344–358.
- [31] Ciarlet, P.G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North–Holland, Amsterdam 1978.
- [32] Ciarlet, P.G. and Raviart, P.A.: A mixed finite element method for the biharmonic equation. In: *Math. Asp. of Finite Elements in Part. Diff. Equ.* Academic Press, New York (1974) 125–145.
- [33] Concha, F. and Bustos, M.C.: Settling velocities of particulate systems. Part 7. Kynch sedimentation processes: continuous thickening. In: *J. Mineral Process.* **34** (1992) 33–51.
- [34] Costabel, M. und Stephan, E.P.: Four Notes on the Coupling of Finite Elements and Boundary Elements. Preprint-Nr.1060 FB. Mathematik, TH Darmstadt 1987.
- [35] Courant, R.: *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces*. Interscience Publ. 1950 Reprint: Springer–Verlag New York 1977.
- [36] Courant, R. und Friedrichs, K.O.: *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publ. 1948 Reprint: Springer–Verlag, New York 1976.
- [37] Courant, R. und Hilbert, D.: *Methods of Mathematical Physics* Vol. II, Interscience Publ., New York 1962.
- [38] Courant, R. und Lax, P.: On nonlinear partial differential equations with two independent variables. *Comm. Pure Appl. Math.* **2** (1949) 255–273.
- [39] Dafermos, C.M.: Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law. *J. Math. Appl.* **38** (1972) 33–41.
- [40] Dafermos, C.M.: Generalized characteristics and the structure of solutions of hyperbolic conservation laws. *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977) 1077–1119.
- [41] Dafermos, C.M.: *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer–Verlag, Berlin, 2000.

-
- [42] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis*, Bd. 1, Vieweg, Braunschweig, 1971.
- [43] Douglis, A.: A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. *Comm. Pure Appl. Math.* **6** (1953) 259–289.
- [44] Duistermaat, J.J. und Hörmander, L.: Fourier integral operators II, *Acta Math.* **128** (1972).
- [45] Eppler, R.: *Strömungsmechanik*. Inst.A für Mechanik. Univ. Stuttgart 1987.
- [46] Erikson, K., Estep, D., Hansbo, P. und Johnson, C.: *Computational Differential Equations*. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1996.
- [47] Evans, L.C.: *Partial Differential Equations*. AMS, Providence, Rhode Island 2002.
- [48] Feistauer, M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longman Sci.& Techn., John Wiley, New York 1993.
- [49] Fix, G. J. und Strang, G.: *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. 1973.
- [50] Friedman, A.: *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs N.J. 1964.
- [51] Friedman, A.: *Partial Differential Equations*. Holt, Rinehart and Winston, New York 1969.
- [52] Girault, V. und Raviart, P.-A.: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [53] Glowinski, R.: *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York 1984.
- [54] Glowinski, R. und Pironneau, O.: On the computation of transonicflows. In: *Functional Anal. and Numerical Anal.* (H. Fujita ed.), *Japan Soc. Promotion of Sci.*, (1978) 143–173.
- [55] Goodsell, G. und Whiteman, J.R.: A unified treatment of superconvergent recovered gradient functions for piecewise linear finite element approximations, *Intern. J. Numer. Methods Eng.* **27** (1989) 469–481.
- [56] Grigorieff, D.: *Numerik Gewöhnlicher Differentialgleichungen* Bd. 1 und 2, B.G. Teubner, Stuttgart 1972.
- [57] Guillemin, V. und Sternberg, A.: *Geometric Asymptotics*, *AMS-Publ.* Providence, Rhode Island 1977.
- [58] Haack, W. und Wendland, W.L.: *Vorlesungen über Partielle und Pfaffsche Differentialgleichungen*, Birkhäuser-Verlag, Basel 1969.

- [59] Habashi, W.G. (Ed.): *Advances in Computational Transonics*, Pineridge Press, Swansea UK 1985.
- [60] Harten, A.: On a class of high-resolution total-variation stable finite difference schemes, *SIAM J. Numer. Analysis* **21** (1984) 1-23.
- [61] Hellwig, G.: *Partielle Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart 1960.
- [62] Hilbert, D.: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, B.G. Teubner, Leipzig 1912 (Nachdruck: Chelsea New York, 1953).
- [63] Hörmander, L.: Fourier Integral Operators I, *Acta Math.* **127** (1971).
- [64] Holden, H. und Risebro, N.H.: *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*. Springer-Verlag, New York 2002.
- [65] Hopf, E.: The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure Appl. Math.* **3** (1950) 201-230.
- [66] Hsiao, G.C., Schnack, E. und Wendland, W.L.: Hybrid coupled finite-boundary element methods for elliptic systems of second order. Computational Mechanics Advances. *Comp. Methods Appl. Mechanics Engrg.* **190** (2000) 431-485.
- [67] Hugoniot, H.: Sur la propagation du mouvement dans le corps et spécialement dans les gas parfaits. *J. Ecole Polytechnique* **58** (1889) 1-125.
- [68] Jameson, A. : Transonic flow calculations. In: *Num. Meth. in Fluid Dyn.* McGraw-Hill, New York (1978) 1-87.
- [69] Jameson, A. : Numerical calculation of transonic flow past a swept wing by a finite volume method, *Comp. Meth. in Appl. Sci. and Engrg.*, **91** (1979) 125-148.
- [70] Jeffrey, A.: *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves*. Pitman, London, 1976.
- [71] John, F.: *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 1971.
- [72] Johnson, C., Nävert, U. und Pitkäranta, J.: Finite element methods for linear hyperbolic problems, Chalmers University of Tech. and the Univ. of Göteborg Fack, S-402 20 Göteborg.
- [73] Johnson, C. und Szepessy, A.: On the convergence of a finite element method for a nonlinear hyperbolic conservation law. *Math. Comp.* **49** (1987) 427-444.
- [74] Johnson, C., Szepessy, A. und Hansbo, P.: On the convergence of shockcapturing streamline diffusion finite element methods for hyperbolic conservation laws, *Math. Comp.* **54** (1990) 107-129.
- [75] Joly, P. und Thomas, J.M.: A mixed finite element method for solving transonic flow equations, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* **39** (1983) 1-18.
- [76] Jost, J.: *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin 2002.

-
- [77] Kamke, E.: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1956. (Erste Auflage 1930).
- [78] Kang, Feng: Asymptotic radiation conditions for reduced wave equation, *J. of Comp. Math.* **2** (1984) 130–138.
- [79] Kato, T: *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer–Verlag, Berlin 1966.
- [80] Kirchgässner, K. und Wendland, W. : Analytische und numerische Behandlung transsonischer Strömungen, *Morawetz CPAM* 38, (1985) 797–818.
- [81] Klötzler, B.: *Mehrdimensionale Variationsrechnung*. Dt. Verlag Wiss., Berlin 1969.
- [82] Krause, E. und de Jager, C. (Eds.): *Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*. Springer–Verlag Berlin 1982.
- [83] Kružkov, S.N.: First order quasilinear equations in several independent variables, *Mat. USSR Sbornik* **10** (1970) 217–243.
- [84] Kunik, M.: Über die schwachen Lösungen skalarer hyperbolischer Erhaltungsgleichungen in der Theorie der Sedimentation. Dr.–Dissertation, Universität Stuttgart 1989.
- [85] Kunik, M.: A numerical method for some initial value problems of one scalar hyperbolic conservation law. *Math. Methods Appl. Sci.* **15** (1992) 495–509.
- [86] Kunik, M.: A solution formula for a non–convex scalar hyperbolic conservation law with monotone initial data. *Math. Methods Appl. Sci.* **16** (1993) 895–902.
- [87] Ladyzhenskaya, O.A.: *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Springer–Verlag, New York, 1985.
- [88] Lax, P.: *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. SIAM, Philadelphia 1973.
- [89] LeVeque, R.J.: *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser–Verlag, Basel 1992.
- [90] Li, T. und Sheng, W.: The general Riemann problem for the linearized system of two–dimensional isentropic flow in gas dynamics. *J. Math. Analysis Appl.* **276** (2002) 598–610.
- [91] Luenberger, D.G.: *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, New York 1969.
- [92] Mandel, J. und Nečas, J.: Convergence of finite elements for transonic potential flows. *SIAM J. Numer. Anal.* **24** (1987) 985–996.
- [93] Maslov, V.P. und Fedorjuk, M.V.: *Semi–Classical Approximation in Quantum Mechanics*. D. Reidel Publ., Dordrecht 1981.

- [94] McOwen, R.C.: *Partial Differential Equations*. Pearson Education, London 1996.
- [95] Michlin, S.G.: *Partielle Differentialgleichungen in der Mathematischen Physik*. Akademie-Verlag, Berlin 1978.
- [96] Milne-Thomson, L.M.: *Theoretical Hydrodynamics*. Mac Millian Comp., London 1968.
- [97] Morawetz, C.: Energy flow: Wave motion and geometrical optics, *Bull. AM. Math. Soc.*, **76** (1970) 661–674.
- [98] Morton, K.W.: Galerkin finite element methods and their generalisations. In: *The State of the Art in Numerical Analysis. IMA Conf. Ser.* **9** (1987) 645–680.
- [99] Morton, K.W. und Paisley, M.F.: A finite volume scheme with shock fitting for the steady Euler equations. *J. Comput. Physics* **80** (1989) 168–203.
- [100] Morton, K.W.: Finite volume and finite element methods for the steady Euler equations of gas dynamics. In: *The Mathematics of Finite Elements and Applications VI* (J. Whiteman ed.) Academic Press, London (1988) 353–377.
- [101] Morton, K.W.: Discretization of unsteady hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* **39** (2001) 1556–1597.
- [102] Natanson, I.P.: *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*. Akademie-Verlag, Berlin 1961.
- [103] Nečas, J.: *Les Méthods Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. Masson, Paris; Academia, Prague 1967.
- [104] Nečas, J.: Entropy compactification of the transonic flow. In: *Springer Lecture Notes in Mathematics* **1192** (1986) 399–408.
- [105] Neunzert, H. und Struckmeier, J.: Particle methods for the Boltzmann equation. In: *Acta Numerica* (A. Iserless ed.) Cambridge Univ. Press (1995) 417–457.
- [106] Oleinik, O.A.: Discontinuous solutions of non-linear partial differential equations. *Usp. Mat. Nauk* **12** (1957), AMS Transl. (2) **26** (1963) 95–172.
- [107] Oleinik, O.A.: Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation, *Usp. Mat. Nauk* **14** (1959) 165–170; AMS Transl. (2), **33** (1964) 285–290.
- [108] Polak, E. : *Computational Methods in Optimization, A Unified Approach*, Academic Press, New York 1971.
- [109] Prandtl, L., Oswatitsch, K. und Wieghardt, K.: *Führer durch die Strömungslehre*, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1984.
- [110] Rankine, W.J.M.: On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance, *Phil. Trans. Royal Soc. London* **160** (1870) 277–288.

-
- [111] Riesz, F. und Nagy, B.S.: *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Dt. Verlag d. Wiss., Berlin 1956.
- [112] Rizzi, A. und Viviani, H.: Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves, *Notes on Numerical Fluid Mechanics* **3**, Vieweg & Sohn, Wiesbaden 1981.
- [113] Roždestvenski, B.L. und Janenko, N.N.: *Systeme Quasilinearer Gleichungen*, Nauka, Moskau 1968 (russisch).
- [114] Shubin, M.A.: *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*. Springer-Verlag, Berlin 1978.
- [115] Smirnow, W.I.: *Lehrgang der Höheren Mathematik IV*, Dt. Verlag d. Wiss., Berlin 1958.
- [116] Smoller, J.: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York 1982.
- [117] Tartar, L.: Compensated compactness and applications to partial differential equations. In: *Nonlinear Analysis and Mechanics*. (R.J. Knops ed.), Pitman, London, (1979) 136–212.
- [118] Tychonoff, A.N. und Samarskii, A.A.: *Differentialgleichungen der Mathematischen Physik*, Dt. Verlag d. Wiss., Berlin 1959.
- [119] Vila, J.-P., Villedieu, P.: Convergence of an explicit finite volume scheme for first order symmetric system. *Numer. Math.* **94** (2003) 573–602.
- [120] Walter, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [121] Walter, W.: *Analysis 1 und 2*, Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [122] Walter, W.: A note on contraction. *SIAM Review* **18** (1976) 107–111.
- [123] Warnecke, G.: *Analytische Methoden in der Theorie der Erhaltungsgleichungen*. B.G. Teubner, Leipzig 1999.
- [124] Wendland, W.L.: On asymptotic error estimates for combined BEM and FEM. In: *Finite Element and Boundary Element Techniques from Mathematical and Engineering Point of View* (E. Stein, W.L. Wendland eds.) CISM LN **301**, Springer-Verlag Wien, New York (1988) 273–333.
- [125] Wendland, W.L.: On asymptotic error estimates for the combined boundary and finite element method. In: *Innovative Methods in Engineering* (R.P. Shaw et al. eds.). Springer-Verlag, Berlin (1986) 55–70.
- [126] Wendland, W.L.: *Elliptic Systems in the Plane*, Pitman, London 1979.
- [127] Wheeler, M.F. und Whiteman, J.R.: Superconvergent recovery of gradients on subdomains from piecewise linear finite-element approximations, *Numer. Methods Partial Diff. Eqns.* **3** (1987) 65–81.

- [128] Whitham, G.B.: *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, New York 1974.
- [129] Whitham, G.B.: *Wave Propagation*, Tata-Institute, Springer-Verlag, Heidelberg 1979.
- [130] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen*. B.G. Teubner, Stuttgart 1982.
- [131] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I-IV*. Springer-Verlag, New York 1988.
- [132] Zierep, J.: *Theoretische Gasdynamik*. Wissenschaft und Technik, C.Braun, Karlsruhe 1976.

Wolfgang L. Wendland
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart
Germany
E-Mail: wendland@ians.uni-stuttgart.de

Erschienene Preprints ab Nummer 2004/001

Komplette Liste: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

- 2004/001 *Geis, W., Mishuris, G., Sändig, A.-M.*: 3D and 2D asymptotic models for piezoelectric stack actuators with thin metal inclusions
- 2004/002 *Klimke, A., Wohlmuth, B., Willner, K.*: Computing expensive multivariate functions of fuzzy numbers using sparse grids
- 2004/003 *Klimke, A., Wohlmuth, B., Willner, K.*: Uncertainty modeling using efficient fuzzy arithmetic based on sparse grids: applications to dynamic systems
- 2004/004 *Flemisch, B., Mair, M., Wohlmuth, B.*: Nonconforming discretization techniques for overlapping domain decompositions
- 2004/005 *Sändig, A.-M.*: Vorlesung Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker I, WS 2003/2004
- 2004/006 *Bürger, R., Karlsen, K. H., Towers, J. D.*: Closed-form and finite difference solutions to a population balance model of grinding mills
- 2004/007 *Berres, S., Bürger, R., Tory, E. M.*: Applications of Polydisperse Sedimentation Models
- 2004/008 *Bürger, R., Karlsen, K. H., Towers, J. D.*: A model of continuous sedimentation of flocculated suspensions in clarifier-thickener units
- 2004/009 *Bürger, R., Karlsen, K. H., Towers, J. D.*: Mathematical model and numerical simulation of the dynamics of flocculated suspensions in clarifier-thickeners
- 2004/010 *Lehrstühle: Wendland, Wohlmuth, Abteilungen: Gekeler, Sändig*: Jahresbericht 2003
- 2004/011 *Sändig, A.-M. (Hrsg.), Knees, D. (Hrsg.)*: Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen in der Festkörpermechanik
- 2004/012 *Wendland, W.L.*: Vorlesungsskript Partielle Differentialgleichungen