Partielle Differentialgleichungen

29. Für $s \in (0, \frac{1}{2})$ und $a > 0$ sei $\phi \in C^\infty(0, a)$. Man beweise die Ungleichung von Hardy,

$$\int_0^a x^{-2s} \left(\int_x^a \frac{\phi(y)}{y} \, dy \right)^2 dx \le \frac{c}{(1-2s)^2} \int_0^x x^{-2s} \, [\phi(x)]^2 \, dx \, .$$

Hinweis: Man definiere $\psi(x) := x^{-1}\phi(x)$, verwende partielle Integration und die Cauchy–Schwarz Ungleichung.

30. Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion mit kompaktem Träger. Für $s \in (0, \frac{1}{2})$ beweise man die Ungleichung

$$\int_0^\infty x^{-2s} \, [u(x)]^2 \, dx \le \frac{c}{(2s-1)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{[u(x) - u(y)]^2}{|x-y|^{1+2s}} \, dx \, dy.$$

Hinweis: Man betrachte

$$v(x) := \frac{1}{x} \int_0^x [u(x) - u(y)] \, dy = u(x) - \frac{1}{x} \int_0^x u(y) \, dy, \quad w(x) := \int_x^\infty \frac{v(y)}{y} \, dy$$

und deren Ableitungen zur Herleitung der Darstellung $u(x) = v(x) - w(x)$. Dann verwende man die Ungleichung von Hardy zur Abschätzung von

$$\int_0^\infty x^{-2s} \, [w(x)]^2 \, dx,$$

und verwende die Definition von v zur Abschätzung von

$$\int_0^\infty x^{-2s} \, [v(x)]^2 \, dx.$$