Partielle Differentialgleichungen

11. Man betrachte die Burgers–Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0$$

mit der Anfangsfunktion

$$u(0,x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < -1, \\ x & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für} \quad x > 1. \end{cases}$$

Man skizziere die Charakteristiken und berechne die Lösung dieses Anfangswertproblems. Erfüllt die Lösung die Rankine–Hugoniot–Bedingung?

12. Man betrachte die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \Big([u(x,t)]^2 + u(x,t)\Big)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0$$

mit der Anfangsfunktion

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Für welche t lässt sich eine Lösung dieses Anfangswertproblems mit der Charakteristiken–Methode berechnen? Man skizziere die Charakteristiken und berechne die Lösung dieses Anfangswertproblems. Ist die berechnete Lösung eine schwache Lösung?

13. Für die Burgers–Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0$$

sind die folgenden, monoton fallenden Anfangsdaten

$$u(x,0) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für } x \geq 0, \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegeben. Man skizziere die Charakteristiken, berechne eine schwache Lösung des Anfangswertproblems und überprüfe, ob die Rankine–Hugoniot–Bedingung erfüllt ist.