Partielle Differentialgleichungen

15. Für eine gegebene Funktion $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, sei der Laplace–Operator durch

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x)$$

gegeben. Man drücke diesen in Polarkoordinaten

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi \quad \text{für } r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$$

aus.

16. Man bestimme die allgemeine Lösung der Laplace–Gleichung

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2, |x| > 0,$$

welche nur von $|x|$ abhängt.

17. Für $\alpha \in (0, 2\pi)$ sei

$$\Omega := \left\{ x = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < \varphi < \alpha \right\}.$$

Man bestimme alle nicht–trivialen Lösungen des Dirichlet Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$