Technische Universität Graz
Institut für Angewandte Mathematik
Univ.–Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2025/2026
Blatt 7
19.11.2025

Partielle Differentialgleichungen

18. Gegeben sei das Randwertproblem

$$-\operatorname{div}[\alpha(u(x))\nabla u(x)] = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega$$

mit einem skalaren Diffusionskoeffizienten $\alpha(u)$. Mit einer geeigneten Transformation $v = v(x, \alpha, u)$ transformiere man die partielle Differentialgleichung auf die Poisson–Gleichung $-\Delta v = f$. Welche Voraussetzung muß dabei an $\alpha(u)$ gemacht werden? Wie ändern sich die Randbedingungen?

19. Gegeben seien die Funktionen

$$v_2(x,y) = \log|x-y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^2, \quad v_3(x,y) = \frac{1}{|x-y|} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Man zeige

$$-\Delta_y v_n(x,y) = 0 \quad \text{für alle } y \neq x \in \mathbb{R}^n, \; n = 2, 3.$$

20. Man bestimme eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$-\Delta_y u(x,y) = \log|y-x| \quad \text{für } y \neq x \in \mathbb{R}^2.$$

Hinweis: Man verwende Polarkoordinaten.