Partielle Differentialgleichungen

Sei X ein Hilbert–Raum mit dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ und mit der Norm $\| \cdot \|_X = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_X}$. Weiters sei X' der Dualraum von X bezüglich dem Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit der Norm

$$\|f\|_{X'} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_X} \quad \text{für } f \in X'.$$

24. Für einen beschränkten, selbst–adjungierten und positiv semi–definiten Operator $A : X \to X'$ sei $u \in X$ Lösung des Variationsproblems

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in X.$$

Man zeige, daß $u \in X$ auch das Funktional

$$F(v) = \frac{1}{2} \langle Av, v \rangle - \langle f, v \rangle \quad \text{für } v \in X$$

minimiert. Weiters zeige man, daß jeder Minimierer $u \in X$ von $F(v)$ auch Lösung des Variationsproblems ist.

25. Man beweise den Darstellungssatz von Riesz: Für jedes lineare und beschränkte Funktional $f \in X'$ existiert ein eindeutig bestimmtes $u \in X$ mit

$$\langle f, v \rangle = \langle u, v \rangle_X \quad \text{für alle } v \in X.$$

26. Die in Aufgabe **25.** erklärte Abbildung definiert den Riesz–Operator $J : X' \to X$. Man zeige

$$\|Jf\|_X = \|f\|_{X'} \quad \text{für alle } f \in X'.$$

27. Sei $A : X \to X'$ beschränkt und X–elliptisch. Man zeige, daß für jedes $f \in X'$ ein eindeutig bestimmtes $u \in X$ als Lösung der Operatorgleichung $Au = f$ in X' existiert.