

Technische Numerik

7. Gegeben ist die zu interpolierende Funktion $f(x) = 2 + x - x^3$.

- a. Man bestimme das Interpolationspolynom $f_4 \in \Pi_4$, welche die Funktion f in den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ und $x_4 = 4$ interpoliert. Weiters bestimme man den maximalen punktweisen Fehler im Intervall $[0, 4]$.
- b. Man bestimme das Interpolationspolynom $f_2 \in \Pi_2$, welche die Funktion f in den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ interpoliert. Ferner gebe man für das Intervall $[0, 2]$ eine Abschätzung für den maximalen punktweisen Fehler an.

8. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^{3/2}$, $x \in [0, 1]$. Man bestimme das Hermite'sche Interpolationspolynom $f_3(x)$ bezüglich der Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$, d.h. es gelte

$$f_3(x_i) = f(x_i), \quad f_3'(x_i) = f'(x_i) \quad \text{für } i = 0, 1.$$

9. Für die Tschebyscheff–Polynome $T_k(x)$ beweise man die Orthogonalität

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k(x)T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } k = \ell \neq 0, \\ \pi & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Man benutze eine geeignete Koordinatentransformation sowie Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen.