

Workshop
**FAST BOUNDARY ELEMENT METHODS
IN INDUSTRIAL APPLICATIONS**

15-18 Oktober 2003, Söllerhaus

Analyse von 3D Rissproblemen mit der BEM unter Verwendung der Multipole Methode

K. Kolk, G. Kuhn
Lehrstuhl für Technische Mechanik
Universität Erlangen-Nürnberg

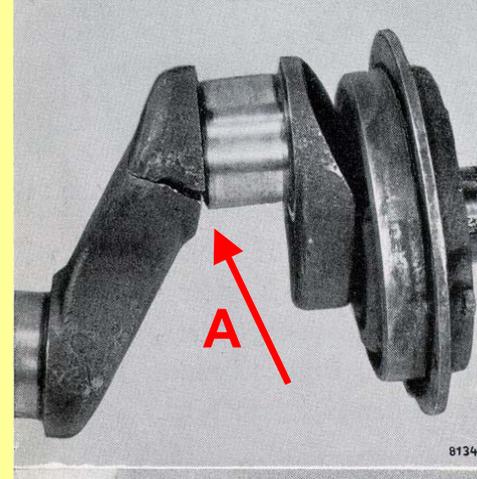


- **Einleitung**
- **3D Dual BEM**
 - Grundgleichungen
 - Numerische Lösung
- **Multipole Methode**
 - Baumstruktur (octree)
 - Kernentwicklungen
 - First shift
 - Second shift
 - Beispiele
- **Zusammenfassung und Ausblick**

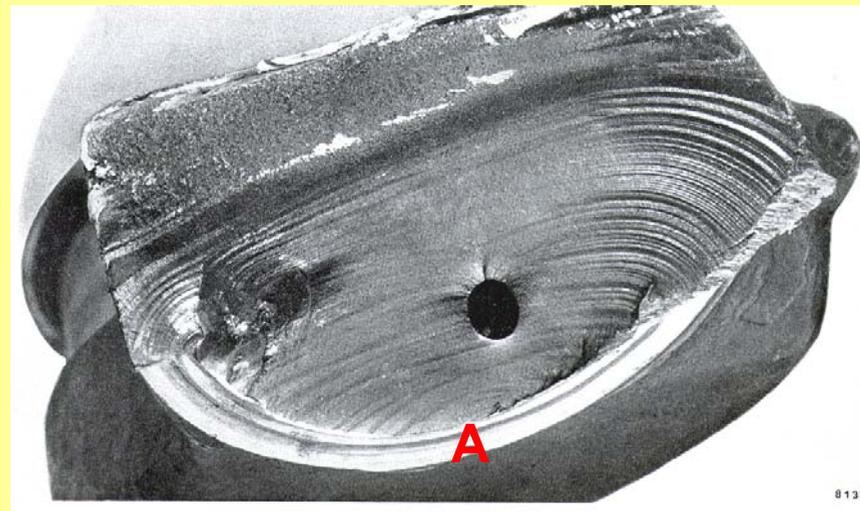
Motivation

„Typisches“ Beispiel für gebrochene Strukturen

- Gebrochene Kurbelwelle



- Stabiles Risswachstum



Einleitung

Ziel: Analyse des 3D Risswachstums

- stabiles Risswachstum
- proportionale Mixed-Mode Beanspruchung
- Komplexe 3D Strukturen mit beliebiger Rissgeometrie
- linear – elastisches Materialverhalten



Untergang der "Prestige"
Nov. '02

3D Rissprobleme

komplexe Topologie

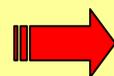


3D Rissfortschrittssimulation

inkrementelle (iterative) Prozedur

- | | |
|---|--|
| ● dreiachsiger Spannungszustand, der entlang der Rissfront variiert | ● Beanspruchungsanalyse |
| ● Mixed – Mode Probleme | ● Bestimmung der neuen Rissgeometrie |
| ● austretende Rissfronten | ● Update des neuen numerischen Modells |
| ● 3D Singularitäten | |

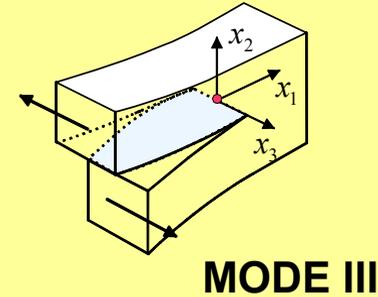
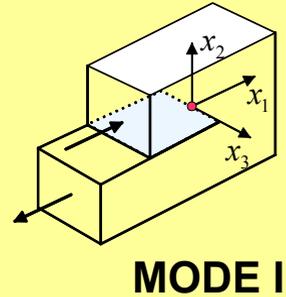
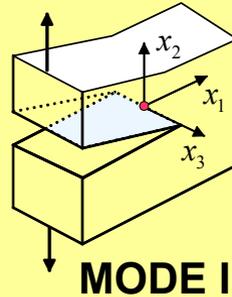
? 3D Rissfortschrittskriterium ?



Predictor-Corrector Procedure [Kolk, Kuhn, '02, '03]

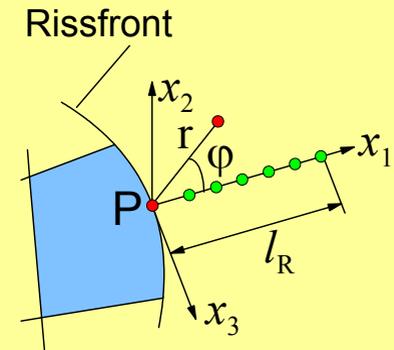
Bruchmechanik I

Rissöffnungsmoden:



Asymptotisches Rissnahfeld

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, P) = \sum_{M=I}^{III} \frac{K_M(P)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^M(\varphi) + T_{ij} + O(\sqrt{r})$$



Bestimmung der K-Faktoren:

- Regression / Extrapolation ($\varphi = 0$)
- Optimierung: Weglassen von Punkten am Anfang und Ende der Regressionsfunktion
Restriktion: Minimierung der Standardabweichung



Hohe Genauigkeit

Bruchmechanik II

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

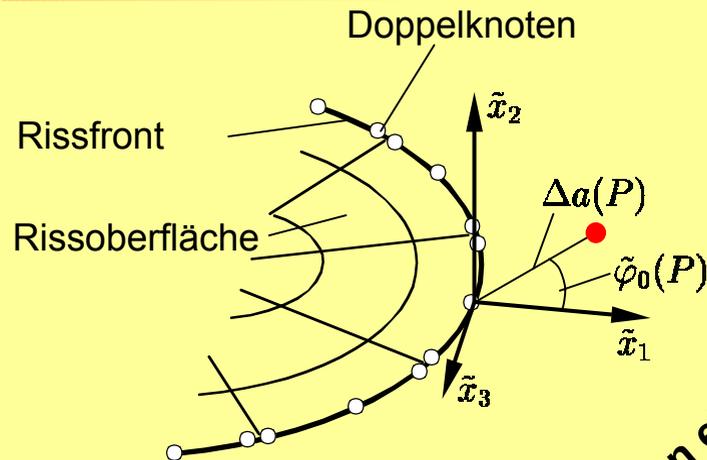
3D Dual BEM

Multipole Methode

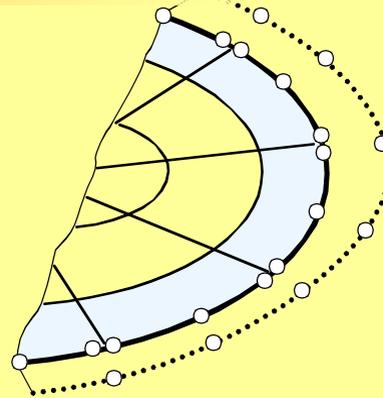
Zusammenfassung

Automatischer 3D Rissfortschrittsalgorithmus:

1. Auswertung eines Fortschrittskriteriums



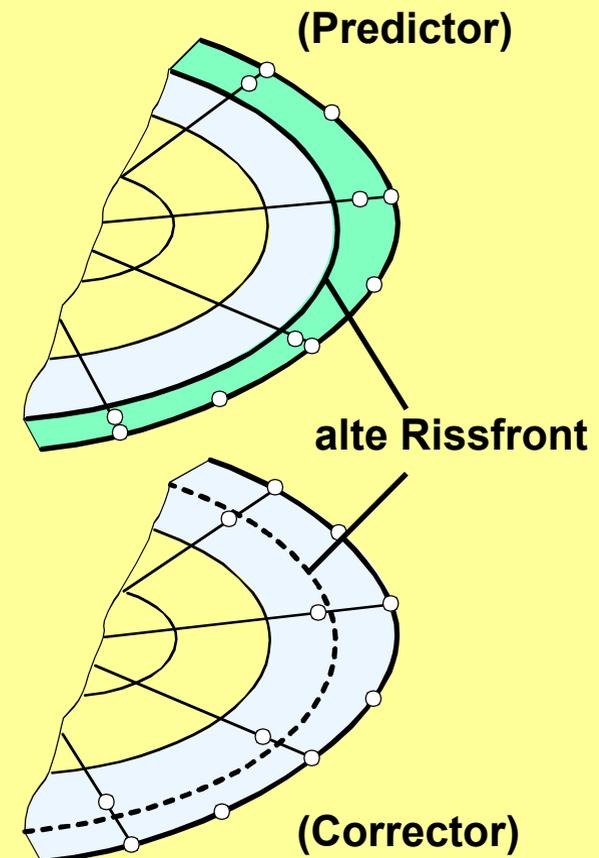
2. Erzeugung der neuen Rissfront



Einfügen einer neuen
Elementreihe

Verschieben der
Rissfrontknoten

3. Anpassung der Vernetzung



Universität
Erlangen-Nürnberg



Motivation der Multipole Methode

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Zusammenfassung

Automatischer 3D Rissfortschrittsalgorithmus

Beanspruchungsanalyse

Zeitintensive Lösung von

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Speicherbedarf: $O(N^2)$

Gleichungslösung: $O(N^3)$, $O(M \cdot N^2)$



Universität
Erlangen-Nürnberg

Problemdefinition

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

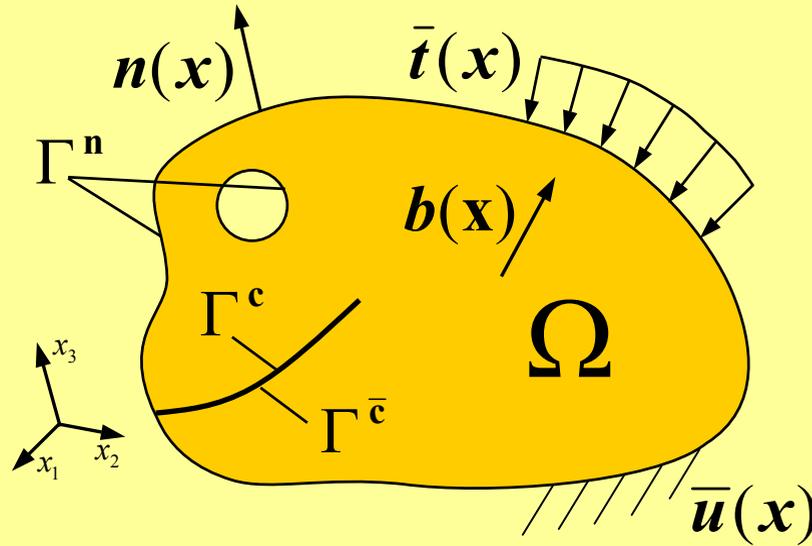
3D Dual BEM

► Grundgleichungen

Lösung

Multipole Methode

Zusammenfassung



Randgeometrie

$$\Gamma = \Gamma^n \cup \Gamma^c \cup \Gamma^{\bar{c}}$$

Lamé-Navier Gleichung

$$u_{j,ii}(\mathbf{x}) + \frac{1}{1-2\nu} u_{l,lj}(\mathbf{x}) + \frac{1}{G} b_j(\mathbf{x}) = 0$$

Cauchy-Formel

$$t_j(\mathbf{x}) = \sigma_{ji}(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x})$$

Randbedingungen

$$u_j(\mathbf{x}) = \bar{u}_j(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma^u$$

$$t_j(\mathbf{x}) = \bar{t}_j(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma^t$$

und

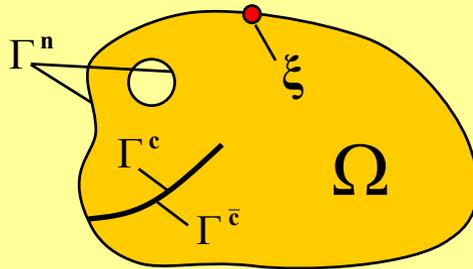
$$\Gamma = \Gamma^u \cup \Gamma^t \quad \text{mit}$$

$$\Gamma^u \cap \Gamma^t = \emptyset$$



Verschiebungs-Randintegralgleichung

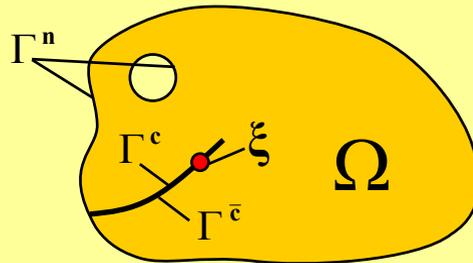
u-RIG Quellpunktlagen auf dem **normalen** Rand ($\xi \in \Gamma^n$)



$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} T_{ij}(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$

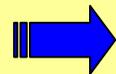
Integralfreier Term $c_{ij}(\xi) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$ (glatter Rand)

u-RIG Quellpunktlagen auf dem **Riss** ($\xi \in \Gamma^c \cup \Gamma^{\bar{c}}$)



$$\frac{1}{2} u_i^c(\xi) + \frac{1}{2} u_i^{\bar{c}}(\xi) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} T_{ij}(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$

- Trennung der identischen Rissoberflächen



Duale Randintegralformulierungen

DUAL BEM (Grundformulierung)

DUAL Discontinuity Method (DDM)

Duale Formulierung

- **Modellierung** von beiden Rissoberfläche in **einer** Substruktur

⇒ **Keine Diskretisierung** im Risswachstumsbereich

- **Einführung** der Randspannungsintegralgleichung (**traction RIG**)

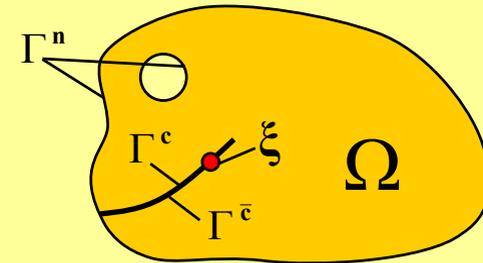
für Quellpunkte auf dem Riss ($\xi \in \Gamma^c \cup \Gamma^{\bar{c}}$)

Kinematik: $\varepsilon_{kl}(\xi) = 0.5 \cdot (u_{k,l}(\xi) + u_{l,k}(\xi))$

Stoffgesetz: $\sigma_{ij}(\xi) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\xi)$

Cauchy Formel: $t_i(\xi) = \sigma_{ij}(\xi) n_j(\xi)$

$$\frac{1}{2} t_i^c(\xi) + \frac{1}{2} t_i^{\bar{c}}(\xi) = \oint_{\Gamma} \bar{U}_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma} \bar{T}_{ij}(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$



$$\bar{U}_{ij}(\xi, \mathbf{x}) = \frac{\partial U_{ij}(\xi, \mathbf{x})}{\partial \xi_k} C_{ijkl} n_l(\xi) \quad \bar{T}_{ij}(\xi, \mathbf{x}) = \frac{\partial T_{ij}(\xi, \mathbf{x})}{\partial \xi_k} C_{ijkl} n_l(\xi)$$

Grundformulierung

Kollokationsmethode

- Diskretisierung der gesamten Oberfläche $\Gamma = \Gamma^n + \Gamma^c + \Gamma^{\bar{c}}$
- Approximation der Randwerte \mathbf{u} und \mathbf{t} über Formfunktionen
- Auswertung der relevanten RIG's im Rahmen der Kollokation:

Diskretisierte Form der \mathbf{u} – RIG für Knoten auf Γ^n

Diskretisierte Form der \mathbf{u} – RIG für Knoten auf Γ^c

Diskretisierte Form der \mathbf{t} – RIG für Knoten auf $\Gamma^{\bar{c}}$

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}$$

- Umordnung entsprechend den Randbedingungen:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{nn} & \mathbf{A}^{nc} & \mathbf{A}^{n\bar{c}} \\ \mathbf{A}^{cn} & \mathbf{A}^{cc} & \mathbf{A}^{c\bar{c}} \\ \mathbf{A}^{\bar{c}n} & \mathbf{A}^{\bar{c}c} & \mathbf{A}^{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^n \\ \mathbf{x}^c \\ \mathbf{x}^{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^n \\ \mathbf{b}^c \\ \mathbf{b}^{\bar{c}} \end{bmatrix}$$



DDM

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Grundgleichungen

► Lösung

Multipole Methode

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

Dual Discontinuity Method (DDM) [Partheymüller et al., '00]

- Einführung von "Sprunggrößen" am Riss

$$\hat{u}_j^c(\mathbf{x}) = u_j^c(\mathbf{x}) - u_j^{\bar{c}}(\mathbf{x})$$

$$\hat{t}_j^c(\mathbf{x}) = n_b^c(\mathbf{x}) \left(\sigma_{jb}^c(\mathbf{x}) - \sigma_{jb}^{\bar{c}}(\mathbf{x}) \right) = t_j^c(\mathbf{x}) + t_j^{\bar{c}}(\mathbf{x})$$

- Auswertung der relevanten RIG's:

Knoten auf Γ^n : Diskretisierte Form der \mathbf{u} – RIG

Knoten auf Γ^c : Diskretisierte Form der \mathbf{u} – RIG oder der \mathbf{t} – RIG

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{nn} & \mathbf{A}^{nc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{cn} & \mathbf{A}^{cc} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}^{\bar{c}n} & \tilde{\mathbf{A}}^{\bar{c}c} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^n \\ \hat{\mathbf{x}}^c \\ \mathbf{x}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^n \\ \mathbf{b}^c \\ \tilde{\mathbf{b}}^c \end{bmatrix}$$

- Postprocessing

Knoten auf $\Gamma^{\bar{c}}$: Diskretisierte Form der \mathbf{t} – RIG oder der \mathbf{u} – RIG

$$\mathbf{x}^c = \tilde{\mathbf{b}}^c - \tilde{\mathbf{A}}^{\bar{c}n} \mathbf{x}^n - \tilde{\mathbf{A}}^{\bar{c}c} \hat{\mathbf{x}}^c$$



Resumé

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Zusammenfassung

Speicherbedarf: $O(N^2)$

Gleichungslösung: $O(N^3)$ $O(M \cdot N^2)$

- **3D Dual BEM – Grundformulierung**

- **3D Dual BEM - DDM**

- **Multipole Methode** [Popov, Power, '01]

$$O(N \log N) \quad \Rightarrow \quad O(N)$$

Numerische Komplexität



Universität
Erlangen-Nürnberg



Grundlegende Integrationen

[Greengard, Rokhlin, '87] ... [Popov, Power, '01]

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

First shift

Second shift

Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

u-RIG

$$\int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$

$$\oint_{\Gamma} T_{ij}(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$

t-RIG

$$\oint_{\Gamma} \bar{U}_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$

$$\oint_{\Gamma} \bar{T}_{ij}(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$$

- Taylor-Entwicklung der Kerne
- Gruppierung von Nah- und Fernfeldanteilen
- Erfordernis einer neuen Datenstruktur

Octree I

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

► Baumstruktur

Kernentwicklungen

First shift

Second shift

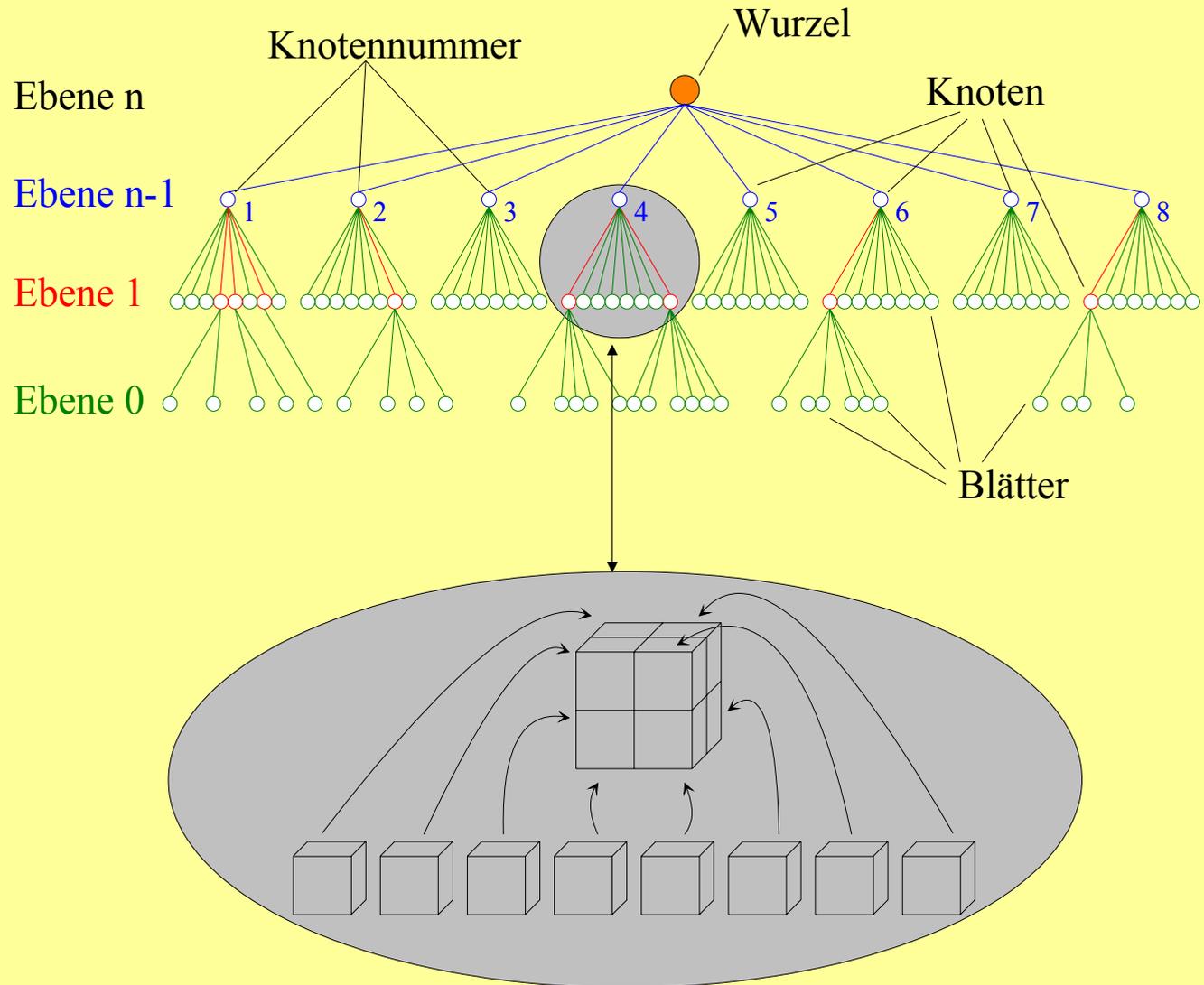
Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

Definition des Baums



Octree II

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

First shift

Second shift

Beispiele

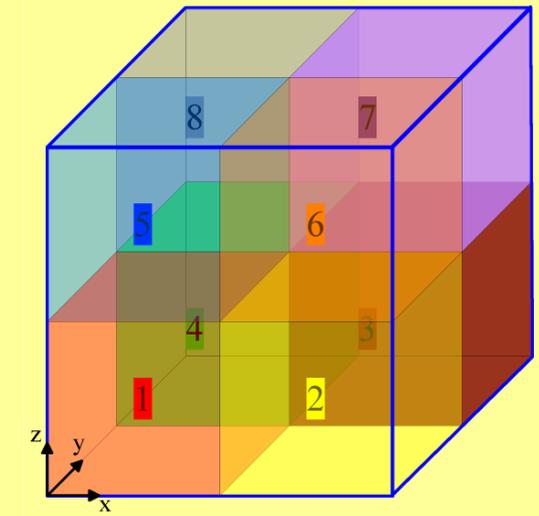
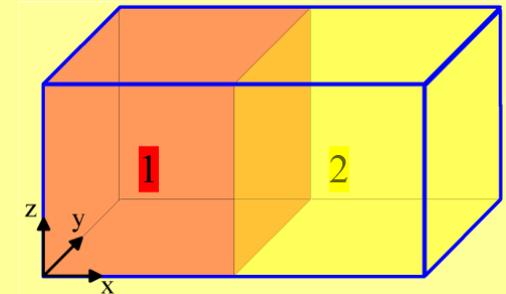
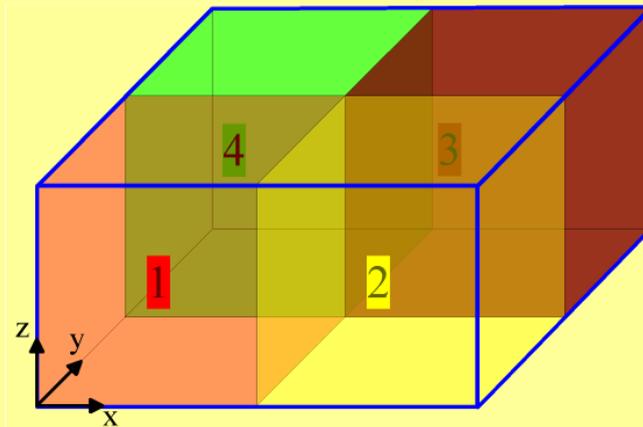
Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

Auffüllen des Baums

- **Definition** des Grundquaders
 - Finden der **minimalen** und **maximalen** Koordinaten jeder Achsrichtung
- **Unterteilung** des Grundquaders in „Würfel“



- **Octal** Strategie

Taylorentwicklung bzgl. der Aufpunkte

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur
Kernentwicklungen

First shift

Second shift

Beispiele

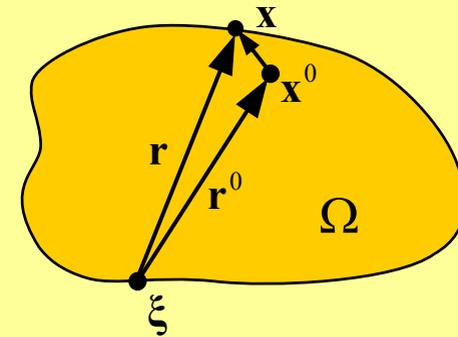
Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

Bedingung

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \ll \|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}^0\|$$



Kerne

$$U_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \propto \frac{1}{R} \quad T_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \propto \frac{1}{R^2}$$

$$\bar{U}_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \propto \frac{1}{R^2} \quad \bar{T}_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \propto \frac{1}{R^3}$$

$$r_i = x_i - \xi_i$$

$$R = \sqrt{r_i r_i}$$

Biharmonische Funktion Ψ

3D Fall:

$$\Psi = R$$

Kerne als Funktion von Ψ I

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

➤ Kernentwicklungen

First shift

Second shift

Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

$$U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1+\nu}{8\pi(1-\nu)E} \left\{ 2(1-\nu)\Psi_{,ss} \delta_{ij} - \Psi_{,ij} \right\}$$

$$T_{ij}(\xi, \mathbf{x}) = \frac{\partial U_{ij}(\xi, \mathbf{x})}{\partial x_l} C_{ijkl} n_k(\mathbf{x})$$

$$= \frac{n_k(\mathbf{x})}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{array}{l} -\Psi_{,ijk} + \nu\delta_{kj} \Psi_{,ssi} + \\ (1-\nu)(\delta_{ij} \Psi_{,ssk} + \delta_{ik} \Psi_{,ssj}) \end{array} \right\} = T_{ij}^k n_k(\mathbf{x})$$

$$\bar{U}_{ij}(\xi, \mathbf{x}) = \frac{\partial U_{ij}(\xi, \mathbf{x})}{\partial \xi_k} C_{ijbk} n_b(\xi)$$

$$= \frac{n_b(\xi)}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{array}{l} -\Psi_{,ijb} - \nu\delta_{ib} \Psi_{,ssj} - \\ (1-\nu)(\delta_{ij} \Psi_{,ssb} + \delta_{bj} \Psi_{,ssi}) \end{array} \right\} = \bar{U}_{ij}^b n_b(\xi)$$



Kerne als Funktion von Ψ II

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

➤ Kernentwicklungen

First shift

Second shift

Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

$$\bar{T}_{ij}(\xi, \mathbf{x}) = \frac{\partial T_{ij}(\xi, \mathbf{x})}{\partial \xi_k} C_{ijbk} n_b(\xi)$$

$$= \frac{E n_k(\mathbf{x}) n_b(\xi)}{8\pi(1-\nu)(1+\nu)} \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{,ibjk} - \nu(\delta_{kj} \Psi_{,ssib} + \delta_{ib} \Psi_{,sskj}) - \\ \frac{1}{2}(1-\nu)(\delta_{ij} \Psi_{,sskb} + \delta_{ik} \Psi_{,ssjb} + \\ \delta_{bj} \Psi_{,sski} + \delta_{bk} \Psi_{,ssji}) \end{array} \right\}$$

$$= \bar{T}_{ij}^{kb} n_k(\mathbf{x}) n_b(\xi)$$

Elastizitätstensor

$$C_{abil} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \delta_{ai} \delta_{bl} + \delta_{al} \delta_{bi} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ab} \delta_{il} \right\}$$



Entwicklung der Kerne

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

► Kernentwicklungen

First shift

Second shift

Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

U-Kern

$$U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) = U_{ij}(\xi, \mathbf{x}^0) + \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{\beta!} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)_{k_1} \cdots (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)_{k_\beta}$$

$$\cdot U_{ij, k_1 \cdots k_\beta}(\xi, \mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0}$$

mit:

$$U_{ij, k_1 \cdots k_\beta}(\xi, \mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} = \frac{\partial^\beta U_{ij}(\xi, \mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_\beta}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} = \frac{1+\nu}{8\pi(1-\nu)E} \left\{ 2(1-\nu) \Psi_{,ssk_1 \cdots k_\beta}(\xi, \mathbf{x}^0) \delta_{ij} - \Psi_{,ijk_1 \cdots k_\beta}(\xi, \mathbf{x}^0) \right\}$$

T-Kern

$$T_{ij}(\xi, \mathbf{x}) = T_{ij}^k(\xi, \mathbf{x}^0) \cdot n_k(\mathbf{x}) + \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{n_k(\mathbf{x})}{\beta!} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)_{k_1} \cdots (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)_{k_\beta}$$

$$\cdot T_{ij, k_1 \cdots k_\beta}^k(\xi, \mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0}$$



Diskretisierung

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

➤ Kernentwicklungen

First shift

Second shift

Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

Approximation der Geometrie

$$x_i = \sum_{m=1}^p N^m(\boldsymbol{\eta}) \cdot x_i^m$$

Jacobideterminante

$$J^n(\boldsymbol{\eta}) = \left| \frac{\partial x_i^n(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial x_i^n(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_2} \right|$$

Approximation der Feldgrößen

Verschiebungen

$$u_i = \sum_{m=1}^p N^m(\boldsymbol{\eta}) \cdot u_i^m$$

Randspannungen

$$t_i = \sum_{m=1}^p N^m(\boldsymbol{\eta}) \cdot t_i^m$$

Diskretisierte Integrale

$$\int_{\Gamma} U_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^p t_j^{n,m} \int U_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta})) N^m(\boldsymbol{\eta}) J^n(\boldsymbol{\eta}) d(\boldsymbol{\eta})$$

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^p u_j^{n,m} \int T_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta})) N^m(\boldsymbol{\eta}) J^n(\boldsymbol{\eta}) d(\boldsymbol{\eta})$$

Verwendung der Kernentwicklungen

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

➔ Kernentwicklungen

First shift

Second shift

Beispiele

Zusammenfassung

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^p \underline{t_j^{nm}} \int \left\{ \begin{array}{l} \underline{U_{ij}(\xi, \mathbf{x}^0)}_+ \\ \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{\beta!} \cdot (\mathbf{x}(\eta) - \mathbf{x}^0)_{k_1} \cdots (\mathbf{x}(\eta) - \mathbf{x}^0)_{k_\beta} \\ \cdot \underline{U_{ij, k_1 \cdots k_\beta}(\xi, \mathbf{x})} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} \end{array} \right\} \underline{N^m(\eta) J^n(\eta) d(\eta)}$$

$$\int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{m=1}^p t_j^{nm} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}^0) M_0^{nm} \right\} + \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{m=1}^p t_j^{nm} \sum_{\beta=1}^{\infty} U_{ij, k_1 \cdots k_\beta}(\xi, \mathbf{x}^0) M_{k_1 \cdots k_\beta}^{nm} \right\}$$

Momente pro Element

$$M_0^{nm} = \int N^m(\eta) J^n(\eta) d(\eta)$$

$$M_{k_1 \cdots k_\beta}^{nm} = \int \frac{1}{\beta!} \cdot (\mathbf{x}(\eta) - \mathbf{x}^0)_{k_1} \cdots (\mathbf{x}(\eta) - \mathbf{x}^0)_{k_\beta} N^m(\eta) J^n(\eta) d(\eta)$$



Gruppierung auf Blattebene

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

➤ Kernentwicklungen

First shift

Second shift

Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

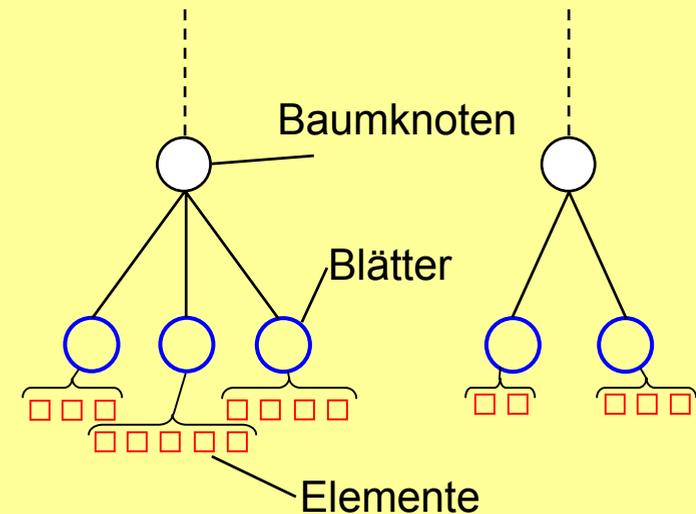
$$\int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N_L} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}_n^0) M_{j0}^n$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N_L} U_{ij, k_1 \dots k_{\beta}}(\xi, \mathbf{x}_n^0) M_{j k_1 \dots k_{\beta}}^{n m}$$

Momente pro Blatt

$$M_{j0}^n = \sum_{\alpha=1}^i \sum_{m=1}^p t_j^{n\alpha m} M_0^{n\alpha m}$$

$$M_{j k_1 \dots k_{\beta}}^n = \sum_{\alpha=1}^i \sum_{m=1}^p t_j^{n\alpha m} M_{k_1 \dots k_{\beta}}^{n\alpha m}$$





Trennung: Nah- und Fernfeld

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

► Kernentwicklungen

First shift

Second shift

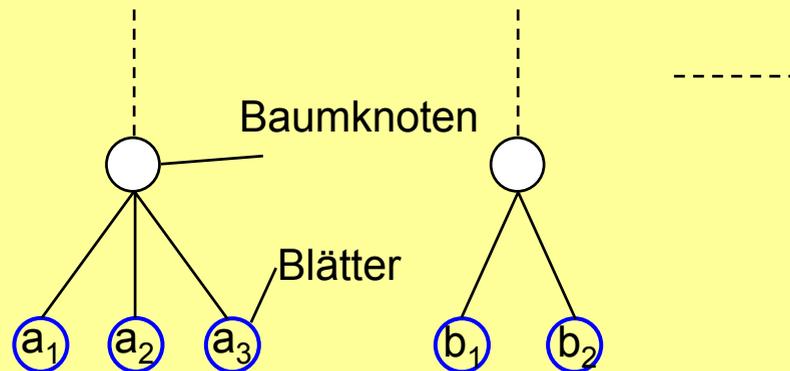
Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_{nf}} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\
 &+ \sum_{n=a_1}^{a_s} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}_n^0) M_{j0}^n + \sum_{n=b_1}^{b_w} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}_n^0) M_{j0}^n + \dots \\
 &+ \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{n=a_1}^{a_s} U_{ij, k_1 \dots k_{\beta}}(\xi, \mathbf{x}_n^0) M_{j k_1 \dots k_{\beta}}^{nm} \\
 &+ \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{n=b_1}^{b_w} U_{ij, k_1 \dots k_{\beta}}(\xi, \mathbf{x}_n^0) M_{j k_1 \dots k_{\beta}}^{nm} + \dots
 \end{aligned}$$





Shiften der Blatt-Momente

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

► First shift

Second shift

Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

First shift [Gomez und Power , '97]

$$\mu_{j0} = M_{j0}$$

$$\begin{aligned} \mu_{jk_1 \dots k_\gamma} &= M_{jk_1 \dots k_\gamma} + \left(\mathbf{x}_0^{i_n} - \mathbf{x}_1^i \right)_{k_\gamma} M_{jk_1 \dots k_{\gamma-1}} + \dots \\ &+ \frac{\left(\mathbf{x}_0^{i_n} - \mathbf{x}_1^i \right)_{k_1} \dots \left(\mathbf{x}_0^{i_n} - \mathbf{x}_1^i \right)_{k_\gamma}}{\gamma!} M_{j0} \end{aligned}$$

Gruppierung auf der ersten Ebene

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

► First shift

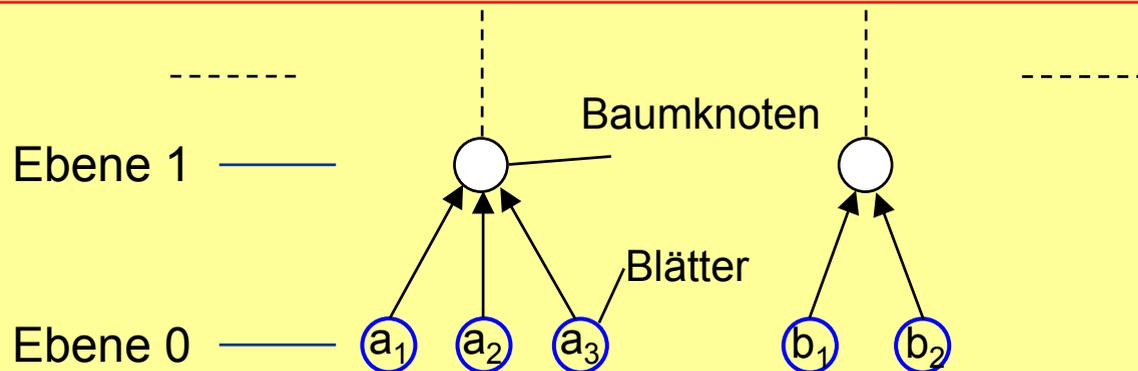
Second shift

Beispiele

Zusammenfassung

Erste Anwendung des First shift

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_{nf}} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\
 &+ U_{ij}(\xi, \mathbf{x}_a^1) \sum_{n=a_1}^{a_s} \mu_{j0}^n + U_{ij}(\xi, \mathbf{x}_b^1) \sum_{n=b_1}^{b_w} \mu_{j0}^n + \dots \\
 &+ \sum_{\beta=1}^{\infty} U_{ij, k_1 \dots k_{\beta}}(\xi, \mathbf{x}_a^1) \sum_{n=a_1}^{a_s} \mu_{jk_1 \dots k_{\beta}}^n \\
 &+ \sum_{\beta=1}^{\infty} U_{ij, k_1 \dots k_{\beta}}(\xi, \mathbf{x}_b^1) \sum_{n=b_1}^{b_w} \mu_{jk_1 \dots k_{\beta}}^n + \dots
 \end{aligned}$$



Maximale Nutzung des Fernfelds

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

➔ First shift

Second shift

Beispiele

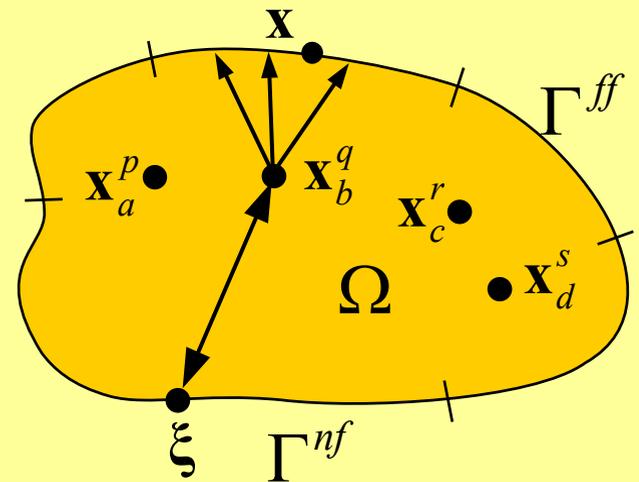
Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_{nf}} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\
 &+ \underbrace{U_{ij}(\xi, \mathbf{x}_a^p) \mu_{j0}^a + U_{ij}(\xi, \mathbf{x}_b^q) \mu_{j0}^b + \dots}_{\text{}} \\
 &+ \underbrace{\sum_{\beta=1}^{\infty} \left\{ U_{ij, k_1 \dots k_{\beta}}(\xi, \mathbf{x}_a^p) \mu_{jk_1 \dots k_{\beta}}^a \right.}_{\text{}} \\
 &+ \left. U_{ij, k_1 \dots k_{\beta}}(\xi, \mathbf{x}_b^q) \mu_{jk_1 \dots k_{\beta}}^b + \dots \right\}}_{\text{}}
 \end{aligned}$$

➔ **Reduktion** der Komplexität auf **$O(N \log N)$**



Second shift

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

First shift

➔ Second shift

Beispiele

Zusammenfassung

Taylor-Entwicklung des U-Kerns bezüglich ξ um \mathbf{z}

$$U_{ij}(\xi, \mathbf{x}^0) = U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^0) + \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{\beta!} \cdot \prod_i (\mathbf{z} - \xi)_{k_i} \cdot U_{ij, k_1 \dots k_\beta}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^0)$$

$$\int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_{nf}} U_{ij}(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + g_{ij0}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_a^p) + g_{ij0}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_b^q) + \dots$$

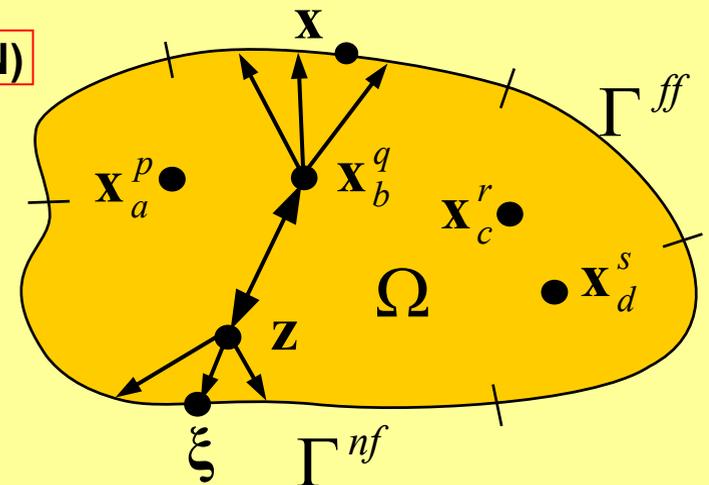
$$+ \sum_{\beta=1}^{N_s-1} \left\{ \begin{array}{l} h_{ijk_1 \dots k_\beta}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_a^p) + \\ h_{ijk_1 \dots k_\beta}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_b^q) + \dots \end{array} \right\} \prod_i (\mathbf{z} - \xi)_{k_i}$$

➔ **Reduktion** der Komplexität auf **$O(N)$**

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

↓

$$\mathbf{A}^{nf} \mathbf{x} + \mathbf{A}^{ff} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$



Balken mit geradem Randeinriss I

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

First shift

Second shift

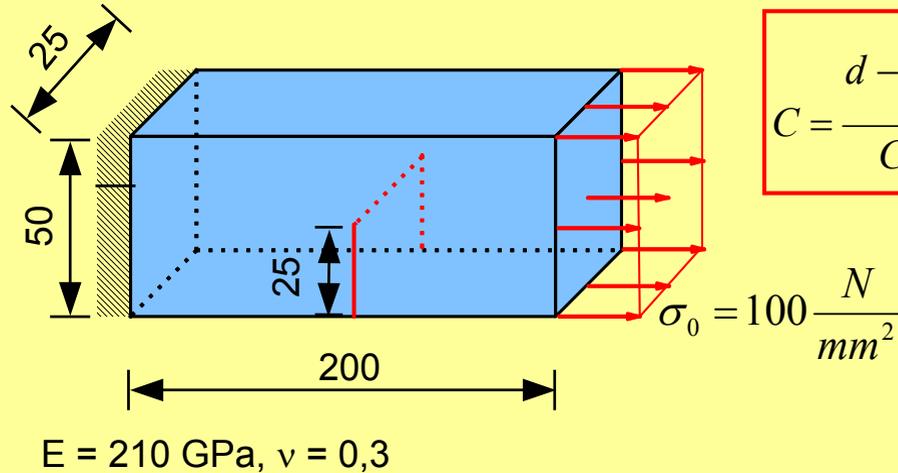
Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

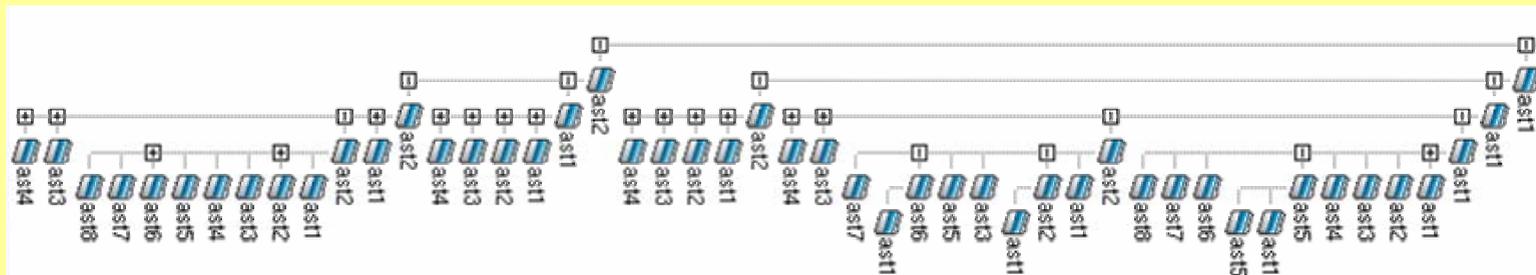
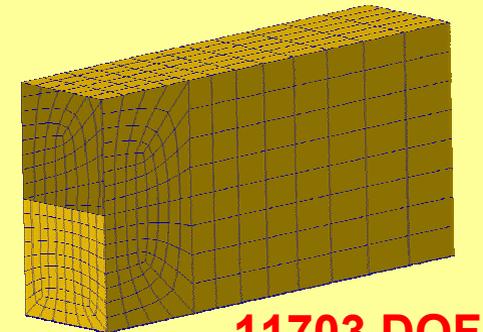
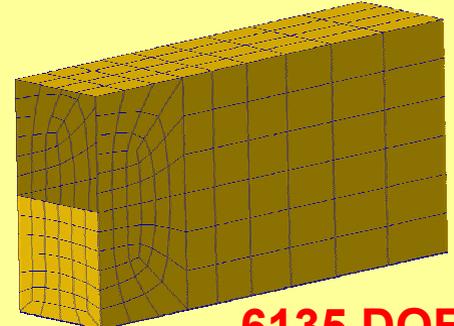
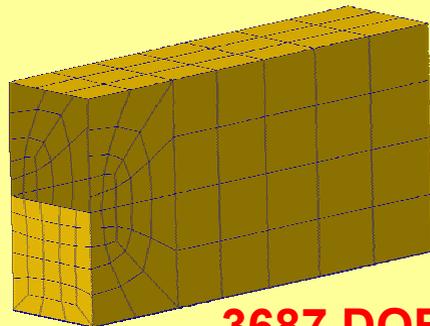
Geometrie und Belastung



Klassifikation des Fernfelds

$$C = \frac{d - \frac{CL_{ff}}{\sqrt{2}}}{CL_{cp}}$$

- d Abstand zwischen dem
Mittelpunkt zweier Cluster
- CL Charakteristische Länge
- ff Fernfeld-Cluster
- cp Quellpunktblatt



Balken mit geradem Randeinriss II

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

First shift

Second shift

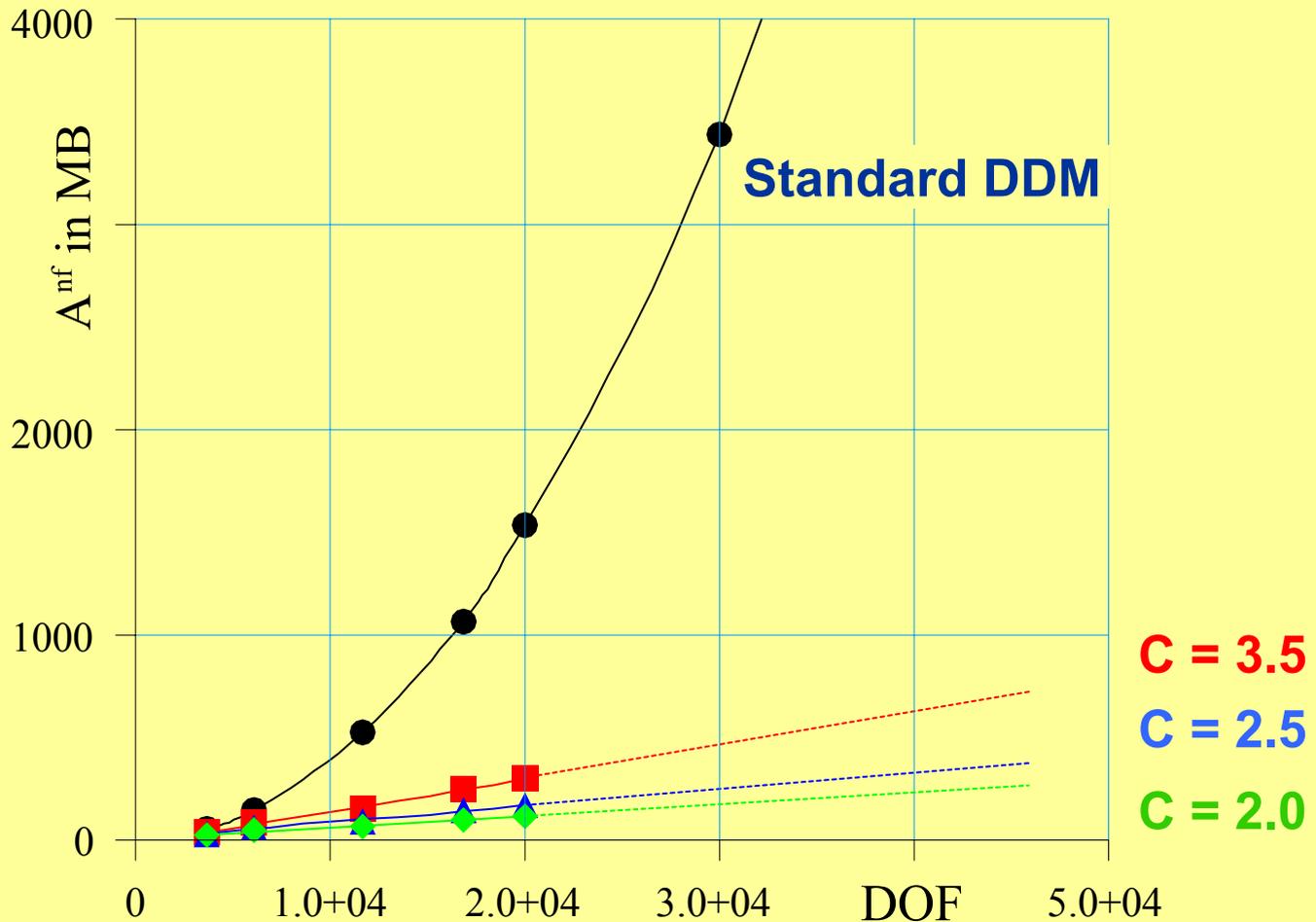
► Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

Kompression der Systemmatrix





Balken mit geradem Randeinriss III

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

First shift

Second shift

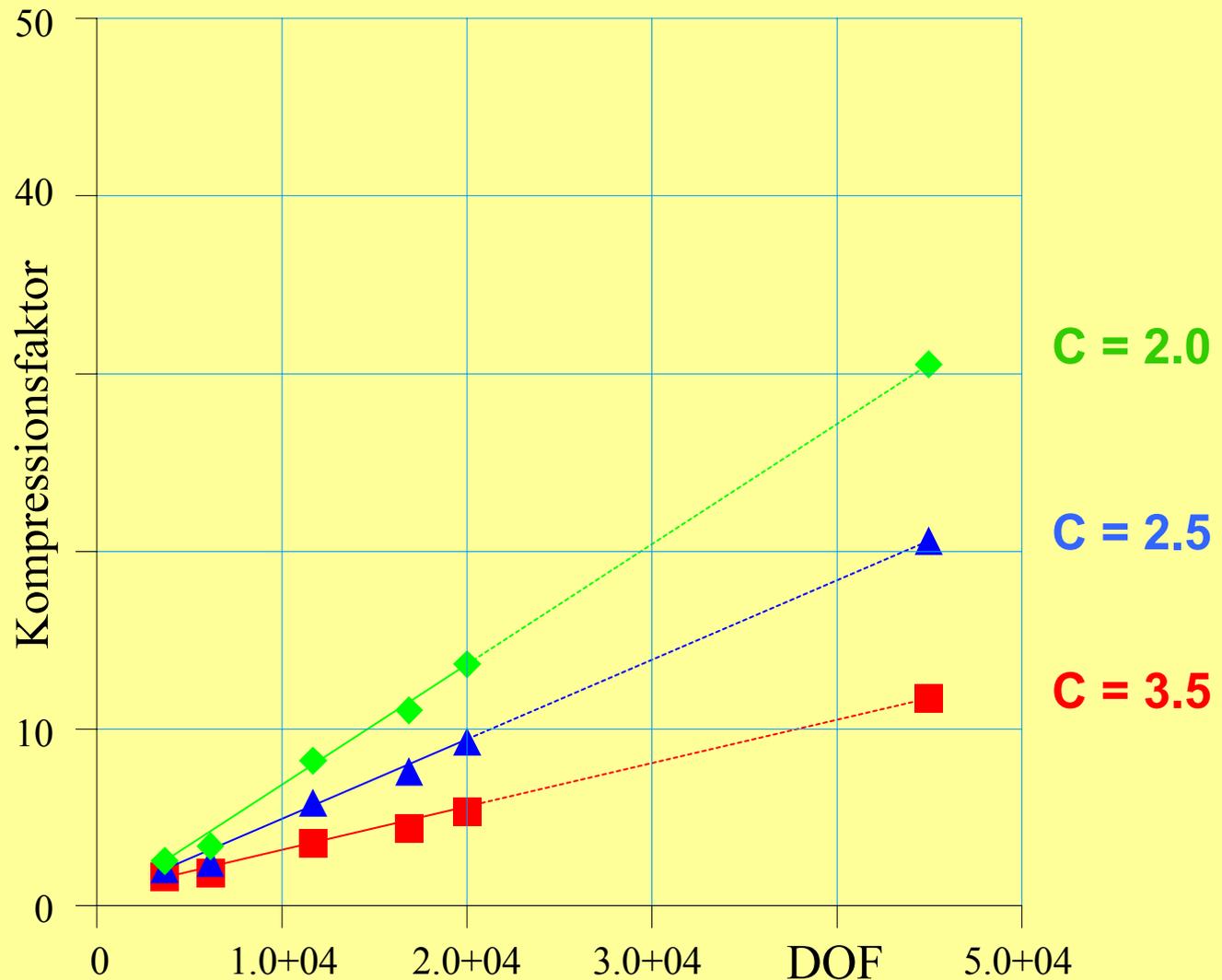
► Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

Kompression der Systemmatrix



4-Punkt-Biegeprobe

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

First shift

Second shift

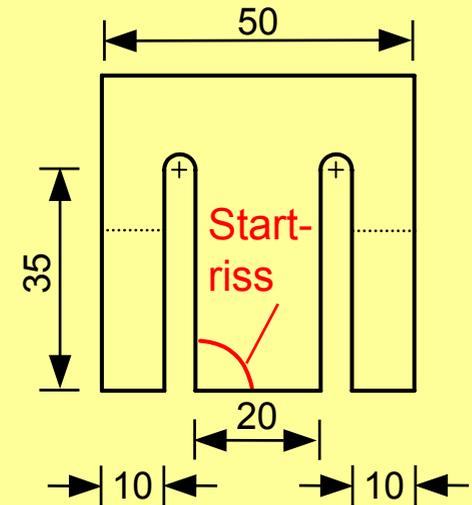
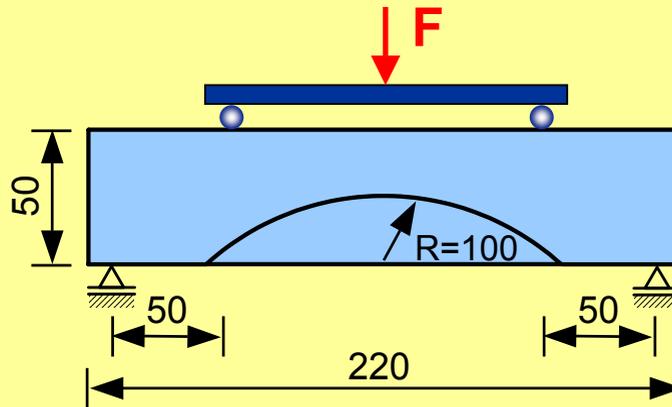
Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

Geometrie & Belastung



Verschiedene Phasen des Rissfortschritts

Experimentelle Untersuchungen

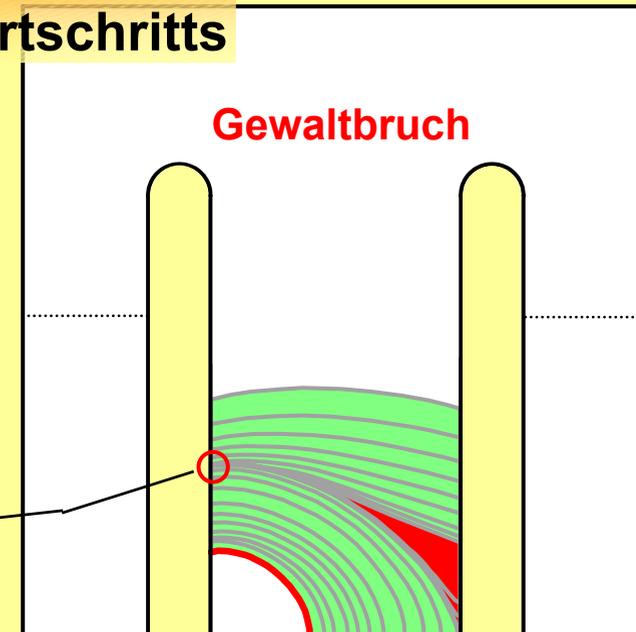
[M. Heyder, '03]

Material: PMMA
Moment of bending: $M = 75 \text{ Nm}$
Frequency: $f = 6.94 \text{ Hz}$
R-ratio: $R = 0.5$

Stabil II

Instabilität &
Stillstand

Stabil I



4-Punkt-Biegeprobe

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

First shift

Second shift

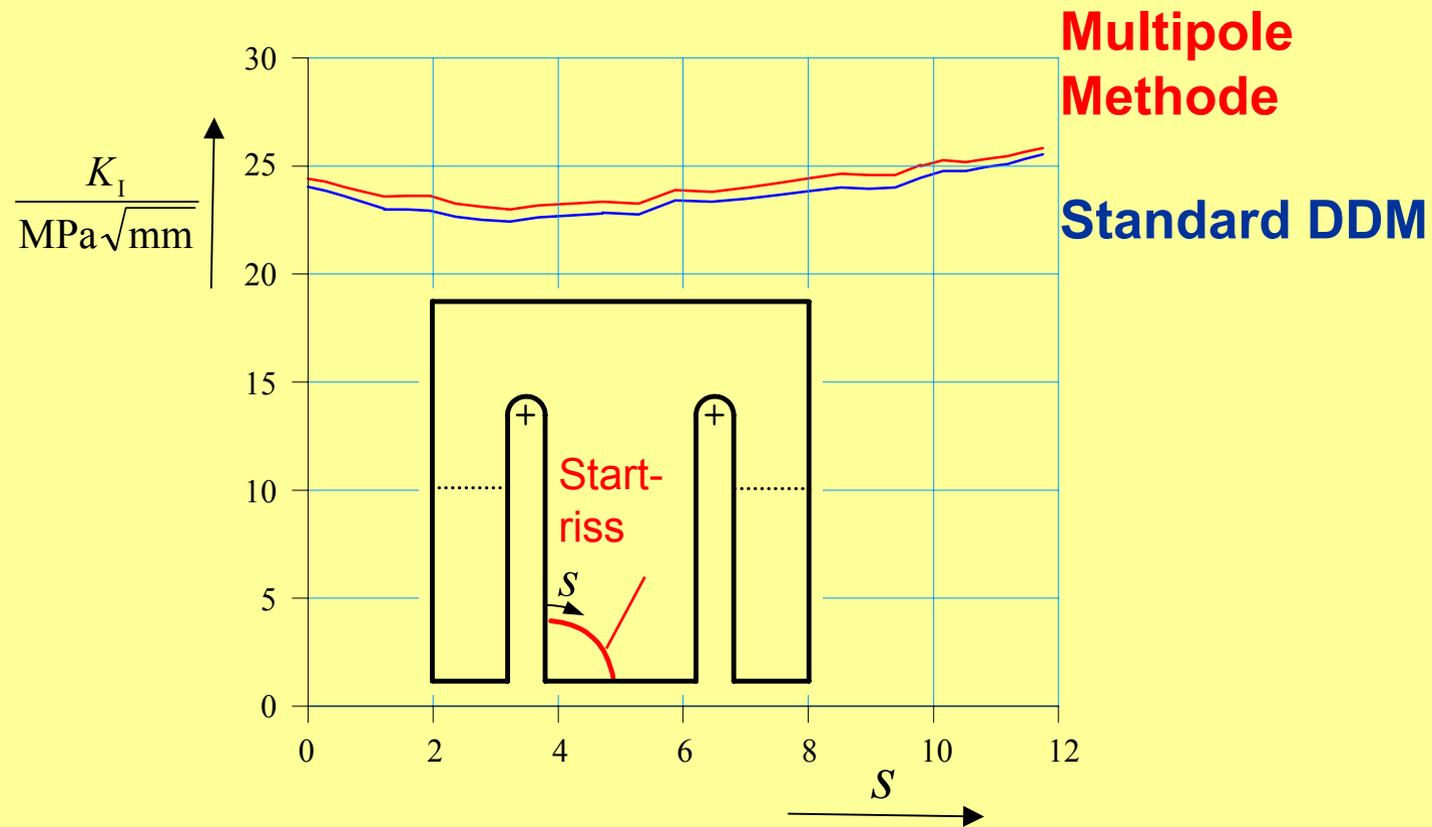
► Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

K-Faktor K_I



4-Punkt-Biegeprobe

Lehrstuhl für
Technische
Mechanik

Einleitung

3D Dual BEM

Multipole Methode

Baumstruktur

Kernentwicklungen

First shift

Second shift

► Beispiele

Zusammenfassung



Universität
Erlangen-Nürnberg

Risspfad

$$\Delta a(P) = \Delta a_0 \frac{G(P) - C \cdot G_{\min}}{G_{\max}}$$

$$\Delta a_0 = 0.5 \text{ mm}$$

$$\Delta K_I \approx 1\%$$

