

# Mathematische Form- und Topologie- optimierung elektrischer Maschinen

## *Mathematical Shape and Topology Optimization of Electrical Machines*

Peter Gangl

Elektrische Maschinen sind heutzutage in unserem Leben allgegenwärtig. Um Maschinen zu gestalten, die – je nach konkreter Anwendung – ihre Aufgaben so gut wie möglich erfüllen, können Verfahren zur mathematischen Optimierung der Geometrie der Maschinen verwendet werden. Solche Verfahren können auch zu neuen Designs führen, die man so eventuell nicht erwartet hätte.

Elektrische Maschinen sind aus unserem täglichen Leben nicht mehr wegzudenken. Immer wenn wir einen Stecker in die Steckdose stecken und dadurch ein Gerät in Bewegung versetzen – sei es ein Mixer, ein Staubsauger oder eine Waschmaschine –, ist ein Elektromotor im Spiel (siehe Abbildung 1), der elektrische Energie in mechanische Energie umwandelt. Auch in industriellen Anwendungen sind Elektromotoren weitgehend unverzichtbar, Industrie-Elektromotoren verbrauchen sogar mehr als 40 Prozent der weltweit produzierten elektrischen Energie. Es ist also offensichtlich, dass die Optimierung solcher elektrischen Maschinen ein großes Potenzial zur Einsparung von Energie darstellt.

Bei der Auslegung elektrischer Motoren muss neben grundsätzlichen Fragen wie nach der Art, Größe oder nach den verwendeten Materialien auch die genaue Gestalt des Motors bestimmt werden, die einen idealen Magnetfluss erlaubt. Da der Magnetfluss im Eisen besser ist als in Luftbereichen des Motors, kann man ihn durch geschicktes Einfügen von Löchern bzw. Luftbereichen in eine gewünschte Richtung leiten (siehe Abbildung 2) und so das gesamte Verhalten des Elektromotors verändern. Dieser Designprozess geschieht häufig durch Intuition und Erfahrung von Elektroingenieur/innen. Durch nachträgliche Optimierung bezüglich geometrischer Parameter wie Längen oder Orientierung von Teilen des Motors kann dieser weiterverbessert werden. Hierbei können jedoch nur Designs erhalten werden, die dieselbe Gestalt haben wie das gewählte Anfangsdesign. >

*Nowadays, electrical machines are ubiquitous in our lives. In order to design machines which – depending on the concrete application – perform as well as possible, mathematical methods for the optimization of the geometry of the machines can be used. These methods can yield designs which one might not have expected beforehand.*

*Electrical machines have become an integral part of our everyday lives. Whenever we put a plug into a power socket and thereby initiate the movement of a device – be it a blender, a vacuum cleaner or a washing machine – there is an electric motor involved (see Figure 1) which converts electrical energy into mechanical energy. Electric motors are almost indispensable also in industrial applications as industrial electric motors consume more than 40% of the electrical energy produced worldwide. Therefore, it is obvious that the optimization of such electrical machines has a large potential for saving energy.*

*When designing electric motors, besides answering fundamental questions about the type, size or materials used, the exact shape of the motor which allows for an ideal magnetic flux also has to be determined. Since the magnetic flux is better in iron than it is in air regions of the motor, it is possible to guide the flux in a desired way by introducing holes or air regions in a smart way (see Figure 2). In this way, the overall performance of the motor can be influenced. This design process is often done based on the intuition and experience of electrical engineers. Additional optimization with respect to geometric parameters, such as lengths or orientations of parts of the motor, can further improve its performance. However, this kind of optimization can only yield designs which are of the same type as the chosen initial design.*

*In my research, I am dealing with the question of how to choose the inclusions of air (or the distribution of material) inside a motor in an optimal >*



© Claudia Boerner

Peter Gangl ist Universitätsassistent am Institut für Angewandte Mathematik der TU Graz.

*Peter Gangl is a university assistant at the Institute of Applied Mathematics at TU Graz.*

### Optimierung

In meiner Forschung beschäftige ich mich mit der Frage, wie man die Lufteinschlüsse (beziehungsweise die Materialverteilung) in einem Motor in einer optimalen Art wählen kann, beispielsweise so, dass der Motor ein möglichst hohes mittleres Drehmoment oder eine möglichst hohe Laufruhe besitzt. Hierbei sollen keine Restriktionen an die Form und Anzahl der Lufteinschlüsse gesetzt werden, sodass auch neue, innovative Designs erzielt werden können. Diese praktische Aufgabenstellung lässt sich als ein mathematisches Problem der Form- bzw. Topologieoptimierung formulieren. Es geht also darum, die Gestalt eines Gebiets  $\Omega$  (also eines gewissen Teils des Elektromotors) zu finden, für die eine gewisse Zielfunktion (zum Beispiel Drehmoment oder Laufruhe) maximiert wird.

**Abbildung 1:**  
**Elektromotor.**  
*Figure 1:*  
*Electric motor.*



© Linz Center of Mechatronics GmbH-  
Hannig Elektro-Works GmbH & Co KG

In diesem Optimierungsproblem ist die Unbekannte also nicht ein Vektor von reellen Zahlen oder eine Funktion in einem Funktionenraum, sondern eine Menge  $\Omega$ , die die Geometrie eines Teils des Motors repräsentiert (siehe Abbildung 3, links). Insbesondere liegt in diesem Fall keine Vektorraumstruktur vor, wir können also beispielsweise nicht zwei Mengen addieren oder subtrahieren. Um gradientenbasierte Optimierungsverfahren verwenden zu können, benötigen wir jedenfalls Ableitungsinfo-

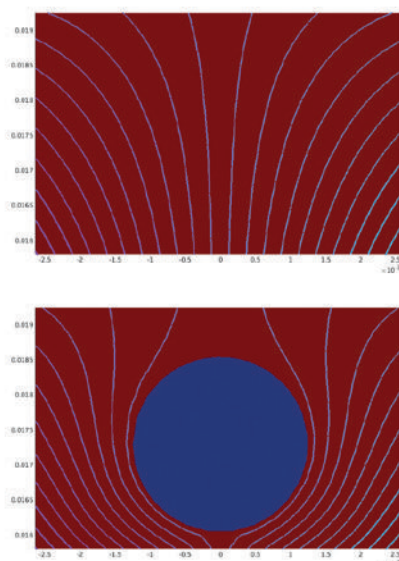
way, e.g., such that the motor achieves a torque which is as high as possible or such that it rotates as smoothly as possible. Here, there should not be any restrictions on the shape and number of air inclusions, allowing for new and innovative designs to arise. This practical task can be reformulated into a mathematical problem of shape or topology optimization. Thus, the task is to find the shape of a domain  $\Omega$  (representing a certain part of the electric motor) which maximizes a given objective function (e.g. torque or smoothness of rotation).

For this optimization problem, the unknown is not a vector of real numbers or a function in a function space, but a set  $\Omega$  which represents the geometry of a part of the motor (see Figure 3 left). In particular, here we do not have a vector space structure and, therefore, cannot simply add or subtract two sets. In order to utilize gradient-based optimization methods, we need sensitivity information, i.e. information about the change of the objective function when the set  $\Omega$  changes. We distinguish between two kinds of geometry changes: on the one hand, the deformation of the boundary of a domain in the direction of a vector field (see Figure 3 center), and on the other hand the modification of the geometry by the introduction of a hole in the interior (see Figure 3 right). The corresponding sensitivities are called shape derivative and topological derivative, respectively.

Using this information, it is possible to gradually improve the geometry until a (locally) optimal design has been reached. In topology optimization, one could introduce a small hole in every optimization step at that position where the topological derivative attains the largest value. Similarly, using the shape derivative it is possible to determine in every iteration a vector field which yields an improvement of the objective function when deforming the domain  $\Omega$  in the direction given by this vector field.

Figure 4 (right) shows the result of a combination of these two approaches. Starting out from the design in Figure 4 (left), the design areas are modified in such a way that the rotation of the motor is as smooth as possible. We can see that, in this way, we could find new optimized machine designs without any expertise in electrical engineering, just using geometric sensitivity information. In order to obtain designs which can be used in practical applications in industry, several additional factors would have to be included. Usually it is not enough to perform optimization only with respect to one objective functional. For instance, in addition to the elec-

**Abbildung 2:**  
**Magnetfluss in Eisen ohne  
und mit Lufteinschluss.**  
*Figure 2:*  
*Magnetic flux in iron without  
and with air hole.*



© Peter Gangl

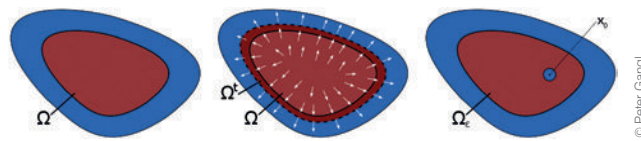
mation, also Information über die Änderung der Zielfunktion bei einer Änderung der Menge  $\Omega$ . Wir unterscheiden zwei Arten von Geometrieänderungen: einerseits die Verformung des Randes eines Gebiets in Richtung eines Vektorfelds (siehe Abbildung 3, Mitte) und andererseits die Veränderung der Geometrie durch Einfügen eines Loches im Inneren (siehe Abbildung 3, rechts). Die entsprechenden Ableitungsinformationen heißen Formableitung beziehungsweise topologische Ableitung.

Mithilfe dieser Informationen ist es nun möglich, ähnlich wie bei einem Gradientenverfahren, schrittweise die Geometrie zu verbessern, bis man ein (lokal) optimales Design erreicht hat. In der Topologieoptimierung könnte man beispielsweise in jedem Optimierungsschritt ein kleines Loch an jener Stelle einfügen, an der die topologische Ableitung den größten Wert annimmt. Ähnlich kann man mithilfe der Formableitung in jeder Iteration ein Vektorfeld bestimmen, sodass eine Verformung des Gebiets in Richtung des Vektorfelds eine Verbesserung des Zielfunktions nach sich zieht.

### Maschinendesign

Abbildung 4 (rechts) zeigt das Ergebnis einer Kombination dieser beiden Zugänge. Ausgehend vom Design in Abbildung 4 (links) werden die Designgebiete so modifiziert, dass die Laufruhe des Motors maximiert wird. Wir sehen, dass sich auf diese Weise ohne elektrotechnisches Vorwissen nur mithilfe geometrischer Ableitungsinformation neue, optimierte Maschinendesigns finden lassen. Für praktische Anwendungen in der Industrie müssten jetzt noch einige weitere Faktoren berücksichtigt werden. So reicht es üblicherweise nicht, für die Optimierung nur eine Zielfunktion zu betrachten. Beispielsweise müssen neben elektromagnetischem Verhalten auch die Kosten des Motors berücksichtigt werden. Es gibt dann nicht eine optimale Lösung, sondern eine Menge von Pareto-optimalen Designs. Weitere Faktoren sind mechanische Festigkeit, thermisches Verhalten und auch die Produzierbarkeit des Designs. Außerdem soll das im Computermodell erstellte optimale Design in der Realität robust gegenüber kleinen Abweichungen, wie sie etwa bei der Fertigung auftreten, sein.

Das Thema der Optimierung elektrischer Maschinen kann also als ein mathematischer Spielplatz gesehen werden, der eine Vielzahl mathematischer und technischer Disziplinen miteinander verbindet und noch genügend Herausforderungen für weitere mathematische und interdisziplinäre Forschung zu bieten hat. ■



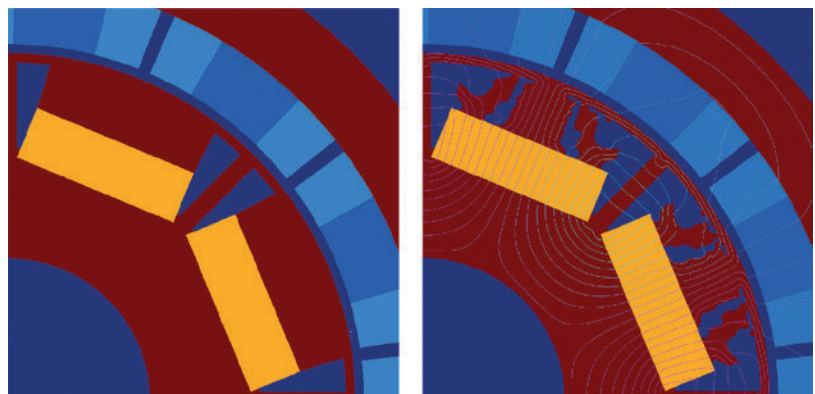
© Peter Gangl

*tromagnetic performance of the motor, we would also have to consider its production cost. Then, there is usually not one optimal solution, but a set of Pareto optimal designs. Further quantities of interest include the mechanical stability, the thermal behavior and also the manufacturability of the optimized design. Moreover, the optimized design, which was created in a computer model, should be robust with respect to small perturbations as they appear during the production process.*

*We see that the topic of optimizing electrical machines can be seen as a mathematical playground connecting a number of mathematical and technical disciplines which still offers enough challenges for further mathematical and interdisciplinary research. ■*

**Abbildung 3:**  
**Schematische Darstellung einer Menge  $\Omega$ , die den Eisenanteil des Motors repräsentiert (links). Verformung von  $\Omega$  in Richtung eines Vektorfelds (Mitte). Veränderung von  $\Omega$  durch Einfügen eines Loches (rechts).**

**Figure 3:**  
**Set  $\Omega$  representing the iron parts of the electric motor (left). Deformation of  $\Omega$  in direction of a vector field (center). Modification of  $\Omega$  by introduction of air hole (right).**



© Peter Gangl

**Abbildung 4:**  
**Anfangsgeometrie (links) und optimierte Geometrie (rechts) mit maximaler Laufruhe.**

**Figure 4:**  
**Initial geometry (left) and optimized design (right) with maximally smooth rotation.**