

Partielle Differentialgleichungen

1. Man transformiere die zweidimensionale Laplace-Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in Polarkoordinaten und berechne alle rotationssymmetrischen Lösungen der Laplace-Gleichung in 2D.

2. Mit Hilfe der Koordinatentransformation $\xi_1 = x - at$, $\xi_2 = x + at$ beweise man die d'Alembertsche Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x - at) + f(x + at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi \right], \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}$$

für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x).$$

3. Sei $\vec{A}(x)$ ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$. Man zeige wenn

$$\operatorname{rot} \vec{A}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} A_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} A_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

gilt, dann existiert eine skalare Funktion $\varphi(x)$ mit

$$\vec{A}(x) = \nabla \varphi(x).$$

4. Man betrachte die Gleichgewichtsbedingungen

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\underline{u}, x) = f_i(x), \quad i = 1, 2, 3,$$

das Hooke'sche Gesetz

$$\sigma_{ij}(\underline{u}, x) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 e_{kk}(\underline{u}, x) + \frac{E}{1+\nu} e_{ij}(\underline{u}, x)$$

und das Materialgesetz der linearen Elastostatik,

$$e_{ij}(\underline{u}, x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \underline{u}_j(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{u}_i(x) \right].$$

Man leite aus diesen Beziehungen ein System von Differentialgleichungen für das Verschiebungsfeld $\underline{u}(x)$ her.

5. Man betrachte das System von partiellen Differentialgleichungen der linearen Elastostatik

$$-\mu \Delta \underline{u}(x) - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u}(x) = \underline{f}(x). \quad (1)$$

Für den Ansatz

$$\underline{u}(x) = \Delta \underline{v}(x) + \alpha \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{v}(x)$$

bestimme man α so, dass $\underline{u}$ Lösung des Systems (1) ist und erhalte daraus eine partielle Differentialgleichung in $\underline{v}$.