

Partielle Differentialgleichungen

6. Man löse das folgende Cauchy-Problem

$$uu_x + u_y = 2, \quad u(y, y) = 1 + y.$$

7. Man löse das folgende Cauchy-Problem

$$xu_x + yzu_y + z^2u_z = 0, \quad u(1, y, z) = y + z.$$

8. Man löse das folgende nichtlineare Cauchy-Problem

$$u_x^2 + u_y^2 - 1 = 0, \quad u(x, 0) = \sqrt{x}.$$

9. Man löse das folgende nichtlineare Cauchy-Problem

$$xy - u_x u_y = 0, \quad u(1, y) = y^2.$$

10. (Eindimensionale Sedimentationsvorgänge)

Bei der Kupfergewinnung wird granuliertes Kupfererz ausgewaschen und dabei das Gesteins-Flüssigkeitsgemisch in großen Sedimentationsbottichen wieder voneinander getrennt, um das Wasser zurückzugewinnen. Für die Dimensionierung und einen effizienten und gesteuerten Betrieb dieser Bottiche ist eine genaue Kenntnis des Sedimentationsvorganges erforderlich. Hier bezeichnet x die Ortskoordinate. Sie beschreibt die Höhe, in der die Konzentration $u(t, x)$ des volumetrischen Feststoffanteils auftritt, und t ist die Zeit. Mit $f(u)$ wird das sogenannte Flußgesetz bezeichnet, das aus experimentellen Messungen bestimmt werden muss. Die Kontinuitätsgleichung lautet dann

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(t, x)) = 0$$

mit den folgenden Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 1, \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

mit $f(u) = u(u - 1)$. Man berechne $u(t, x)$ mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens.