

Partielle Differentialgleichungen

11. Man berechne eine Lösung der Differentialgleichung

$$xu_x + yu_y + zu_z = \frac{2u}{1 + \ln(x^2 + y^2 + z^2)},$$

die auf der Einheits-Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ den konstanten Wert C annimmt.

12. Man betrachte die Differentialgleichung

$$xu_x + yu_y + zu_z = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

a)

$$u(x, y, 1) = e^{-(x^2+y^2)},$$

b)

$$u(x, y, 0) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Man überprüfe die Lösbarkeit dieser Anfangswertprobleme und berechne gegebenenfalls die Lösung bzw. argumentiere warum es keine Lösung geben kann.

13. Man betrachte die Burgers-Gleichung

$$u_t + u u_x = 0$$

mit der Anfangsfunktion

$$u(0, x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -1, \\ x & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Man skizziere die Charakteristiken und berechne die Lösung dieses Anfangswertproblems. Erfüllt die Lösung die Rankine-Hugoniot-Bedingung ?

14. Für die Burgers-Gleichung aus Beispiel 13 sind nun die folgenden, monoton fallenden Anfangsdaten

$$u(0, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für } x \geq 0, \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegeben. Man skizziere die Charakteristiken, berechne eine schwache Lösung des Anfangswertproblems und überprüfe, ob die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt ist.