Technische Universität Graz — SS 2006
Institut für Numerische Mathematik — Blatt 4
Prof. Dr. Olaf Steinbach — 24.5.2006

Partielle Differentialgleichungen

15. Man beweise, daß

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \le \dfrac{1-\alpha}{2}t, \\ -\alpha & \text{für} \quad \dfrac{1-\alpha}{2}t < x \le 0, \\ \alpha & \text{für} \quad 0 < x \le \dfrac{\alpha-1}{2}t, \\ -1 & \text{für} \quad x \ge \dfrac{\alpha-1}{2}t, \end{cases}$$

für alle $\alpha \ge 1$ eine schwache Lösung der Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0$$

mit der Anfangsfunktion

$$u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \le 0, \\ -1 & \text{für} \quad x > 0, \end{cases}$$

ist, d.h.

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \left[u(t,x)v_t(t,x) + F(u(t,x))v_x(t,x)\right] dxdt + \int\limits_{-\infty}^\infty u_0(x)v(0,x)dx = 0$$

ist für alle $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ erfüllt.

16. Gegeben sei die Burgers-Gleichung mit den Anfangsdaten

$$u(0,x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0, \\ 1 & \text{für} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

1. Man zeige, daß $u(t,x) = u(0,x)$ eine schwache Lösung ist.
2. Man berechne die Lösung $u^\varepsilon(t,x)$ der Burgers-Gleichung mit den Anfangsdaten

$$u^\varepsilon(0,x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < -\varepsilon, \\ \dfrac{x}{\varepsilon} & \text{für} \quad -\varepsilon \le x \le \varepsilon, \\ 1 & \text{für} \quad x > \varepsilon. \end{cases}$$

3. Man berechne $\tilde{u}(t,x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(t,x)$. Es gilt $\tilde{u}(0,x) = u(0,x)$, warum gilt jedoch nicht $\tilde{u}(t,x) = u(t,x)$?

17. Man bestimme eine schwache Entropie-Lösung von

$$u_t + (e^u)_x = 0$$

mit den Anfangsdaten

$$u(0,x) = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad x < 0, \\ 0 & \text{für} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

18. Man bestimme die schwache Entropie-Lösung für die Erhaltungsgleichung

$$u_t + (u^4)_x = 0$$

mit den Anfangswerten

$$u(0,x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0, \\ 1 & \text{für} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

19. Sei $c(x)$ eine stetige und lokal beschränkte Funktion. Man betrachte das Erhaltungsgesetz

$$u_t + c(x)f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

1. Man definiere die Charakteristiken für diese Differentialgleichung.
2. Wie lautet die Rankine-Hugoniot Bedingung in diesem Fall ?
3. Man bestimme die Lösung für $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, $c(x) = 1 + x^2$ und

$$u(0,x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0, \\ 1 & \text{für} \quad x \geq 0. \end{cases}$$