Partielle Differentialgleichungen

20. Man transformiere die Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (A(u)\nabla u) = 0$$

mit einer geeigneten Transformation $v(x) = \alpha(x, u(x))$ auf die Laplace-Gleichung

$$-\Delta v = 0.$$

Wie muss α gewählt werden bzw. welche Voraussetzungen muss die skalare Funktion $A(u)$ erfüllen, um diese Transformation durchführen zu können?

21. Man zeige mit Hilfe der Poissonschen Integralformel, daß das Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0 \quad \text{für } x \in B_R(0), \\ u(x) &= C \quad \text{für } x \in \partial B_R(0) \end{aligned}$$

als einzige Lösung $u(x) = C$ besitzt.

22. Man leite die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^3$ her.

23. Die Poissonsche Integralformel für die Einheitssphäre $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ lautet

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{|y|=1} g(y) \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^3} ds_y \quad \text{für } x \in B_1(0).$$

Ein Punkt $y \in \partial B_1(0)$ läßt sich dann mit Hilfe von Kugelkoordinaten wie folgt darstellen

$$y = (\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta) \quad 0 \le \vartheta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Die Dirichlet-Randwerte seien gegeben durch

$$g(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le \vartheta < \vartheta_0, \\ 1 & \text{für} \quad \vartheta_0 \le \vartheta < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \le \vartheta < \pi \end{cases}$$

mit $0 < \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$. Man berechne $u(0, 0, -t)$ für $0 < t < 1$.

24.
1. Wie lautet die Poissonsche Integralformel, wenn als Gebiet nicht $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$, sondern allgemein $B_R(x_0)$ mit einem beliebigen Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ betrachtet wird ?

2. Sei nun $u(x)$ eine Lösung der Laplace-Gleichung in einem beliebigen Gebiet Ω. Man zeige, daß für einen Kreis $B_R(x_0) \subset \Omega$ gilt : Der Wert $u(x_0)$ im Mittelpunkt des Kreises ist gleich dem Mittelwert von $u(x)$ am Rand des Kreises $\partial B_R(x_0)$.

3. Man zeige, daß $u(x_0)$ ebenfalls dem Mittelwert von $u(x)$ im ganzen Kreis entspricht.