

Partielle Differentialgleichungen

25. Man leite aus Beispiel 24. das Maximumprinzip für harmonische Funktionen her :
 Gegeben sei eine harmonische Funktion $u(x)$ in einem zusammenhängenden Gebiet Ω .
 $u(x)$ nimmt dann sein Maximum bzw. Minimum immer am Rand $\partial\Omega$ an, es sei denn $u(x)$
 ist konstant.

26. Gegeben sei die Fundamentallösung $U^*(x, y)$ der Laplace-Gleichung im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.
 $G(x, y)$ sei definiert durch

$$G(x, y) = U^*(x, y) - F(x, y)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta F(x, y) &= 0 & \text{für } y \in \Omega, \\ F(x, y) &= U^*(x, y) & \text{für } y \in \Gamma, \end{aligned}$$

$|F(x, y)| < M_1$ und $\|\nabla F(x, y)\|_2 < M_2$ für $y \in \Omega$ gilt. Man zeige, dass für die Lösung
 des Dirichlet-Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x) & \text{für } x \in \Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

die Darstellungsformel

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} g(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Omega \tag{2}$$

gilt.

27. (Poissonsche Integralformel im Halbraum) Die Darstellungsformel (2) gilt auch für das
 unbeschränkte Gebiet $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ und den Rand $\Gamma = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$.
 Man zeige, dass die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems (1) als folgendes Integral
 dargestellt werden kann :

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2 g(t)}{(x_1 - t)^2 + x_2^2} dt$$

Hinweis : Man konstruiere mit Hilfe des Spiegelungsprinzips die Greensche Funktion
 $G(x, y)$, d.h.

$$G(x, y) = U^*(x, y) - U^*(\tilde{x}, y)$$

wobei $\tilde{x} = (x_1, -x_2)$ der an der x_1 -Achse gespiegelte Punkt $x = (x_1, x_2)$ ist.

28. Man leite die Poissonsche Integralformel aus Beispiel 23. für die Kugel $B_1(0)$ im $\mathbb{R}^3$
 mit Hilfe des Spiegelungsprinzips her. Als Greensche Funktion verwende man

$$G(x, y) = U^*(x, y) - U^*(|x|\tilde{x}, |x|y)$$

und als Spiegelungspunkt $\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$.