Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Blatt 1
11.10.2005

Numerische Mathematik 1

1. Für die Vandermonde-Matrix

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

zeige man

$$\det V_n = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

2. Betrachtet werde das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2+\varepsilon & 2-\varepsilon \\ 2-\varepsilon & 2+\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit eines kleinen Parameters $\varepsilon > 0$.

a) Man berechne die spektrale Konditionszahl der Systemmatrix A.

b) Mittels des Gaußschen Eliminationsverfahren bestimme man eine allgemeine Lösungsformel des linearen Gleichungssystems.

c) Für $\varepsilon = 10^{-4}$ und $a = b = 2$ bestimme man die exakte Lösung des linearen Gleichungssystems. Wie ändert sich diese für $a = 2$ und $b = 2.1$?

d) Bei Verwendung einer dreiziffrigen Gleitkommaarithmetik wird die Summe $2+\varepsilon$ für $\varepsilon = 10^{-4}$ mit 2 identifiziert. Wie ändern sich dann die Lösungen für $a = b = 2$ bzw. $a = 2$ und $b = 2.1$?

3. Die Lagrange-Polynome seien gegeben durch

$$L_j(x) = \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \qquad \text{für } i,j = 0,...,n, \quad x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j.$$

Man zeige:

a)

$$\sum_{j=0}^{n} L_j(x) \equiv 1.$$

b) Sei

$$\lambda_j = \frac{1}{\prod_{i\neq j}(x_j - x_i)} \qquad \text{für } i,j = 0,...,n, \quad x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j,$$

dann gilt für $n \geq 1$:

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 0.$$

4. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+5x^2}$ werde im Intervall [-2,2] in den Stützstellen $x_i = -2 + \frac{4}{n} i$ für $i = 0, ..., n$ interpoliert. Für den Interpolationsfehler erhält man die Abschätzung

$$\max_{x\in[-2,+2]} |f(x) - f_n(x)| \leq \max_{x\in[-2,+2]} | \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) |$$

mit $\xi \in (-2, +2)$. Für $n = 1$ und $n = 2$ bestimme man explizite obere Schranken des Fehlers und diskutiere diese.

5. Betrachtet werden die rekursiv durch

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x \qquad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \qquad \text{für } k = 1, 2, ...$$

definierten Tschebyscheff-Polynome. Für $x \in [-1, +1]$ beweise man die alternative Darstellung

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x).$$

Wie lauten die Extremwerte von $T_k(x)$?