Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Blatt 2
25.10.2005

Numerische Mathematik 1

6. Die Funktion $y = f(x) = 4\cos(\pi x) - 2\sin(\pi x)$ besitzt auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion x = g(y) (Warum?). Man bestimme das Interpolationspolynom g_2 von g unter Verwendung der Stützstellen $y_i = f(x_i)$ mit $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2}$.

7. Man zeige, dass die Tschebyscheff-Polynome $T_n(x)$ für $x \in [-1, +1]$ folgende Differentialgleichungen erfüllen:

a) $n^2(1 - T_n^2(x)) = (1 - x^2)(T_n'(x))^2$,

b) $(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$.

8. Für die Funktion $f(x) = \sqrt{4 + 16x^2}$, $x \in [-1, +1]$ bestimme man die quadratische Polynominterpolation mit Tschebycheff-Polynomen, so dass der Fehler in der Maximumsnorm minimal ist. Hierzu stelle man einerseits das lineare Gleichungssystem auf, andererseits benutze man die explizite Lösungsformel für die Zerlegungskoeffizienten.

9.a) Sei $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar und $f_n(x)$ ihre zugehörige lineare Splinefunktion. h_{max} sei die maximale Schrittweite.
Man zeige:

$$\max_{x \in [a,b]} \mid f(x) - f_n(x) \mid \leq \frac{h_{\max}^2}{8} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|.$$

Hinweis: Man verwende die in der Vorlesung dargestellte allgemeine Formel für die Abschätzung des Interpolationsfehlers.

9.b) Für die stückweise linear Interpolierende $f_n(x)$ der auf dem Intervall $[\frac{1}{5}, 1]$ gegebenen Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\int_{\frac{1}{5}}^{1} [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \frac{1}{2} h^4 \int_{\frac{1}{5}}^{1} |f''(s)|^2 ds$$

bei gleichmäßig verteilten Stützstellen mit der Schrittweite h.
Man bestimme die Anzahl der Stützstellen, so dass die Fehlerabschätzung kleiner als 10^{-2} ist.

10. Gegeben seien die vier Stützstellen $x_i = i$ für $i = 0, 1, 2, 3$. Man bestimme eine stetig differenzierbare Ansatzfunktion $\varphi(x)$, welche in den Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, 2, 3$ durch ein quadratisches Polynom beschrieben werden kann, und für welche

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi(x_3) = \varphi'(x_3) = 0$$

gilt.