Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Blatt 3
15.11.2005

## Numerische Mathematik 1

**11.** Sei $f(x) = x^2$ gegeben auf dem Intervall $I = [0, 1]$. Zu bestimmen sind für $n = 2$ die Interpolation und die Projektion auf den Raum der stückweise linearen Ansatzfunktionen. Dabei gehe man von einer gleichmäßigen Unterteilung von $I = [0, 1]$ aus. Anschließend berechne man die Approximationsfehler in der $L_2$-Norm.

**12.** Es sei $f(x)$ auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar. Man beweise die folgende Fehlerabschätzung für die Mittelpunktformel

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3, \qquad \eta \in (a, b)$$

**13.** Es sei $f(x)$ auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar. Man beweise die folgende Fehlerabschätzung für die zusammengesetzte Trapezregel

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k)) - \frac{h^2(b-a)}{12}f''(\mu),$$

mit $h = \frac{b-a}{m}$, $x_k = a + kh$ für $k = 0, \ldots, m$ und $\mu \in (a, b)$.

Wie groß muss m gewählt werden, um dass Integral mit der zusammengesetzten Trapezregel

$$\int_0^4 \frac{1}{1+x}dx$$

mit einer absoluten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$ zu approximieren.

**14.** Man bestimme die Stützstellen $x_k$ und Integrationsgewichte $\omega_k$ der Gauß-Legendre-Integrationsformel

$$\int_0^4 f(x)dx = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

und verwende diese Formel zur näherungsweise Berechnung von

$$\int_0^4 \frac{1}{1+x}dx.$$

**15.** Man zeige die Orthogonalität der Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^1 P_k(x)P_l(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{für } k \neq l. \end{cases}$$

Hinweis: Man wende wiederholt die partielle Integration an.