# Numerische Mathematik 1

**16.** Für das Referenz-Quadrat $\tau = (0,1)^2$ ist eine numerische Integrationsformel

$$\int_\tau f(x,y)dydx = \sum_{k=1}^{4} \omega_k f(x_k, y_k) + R_4$$

herzuleiten, die Polynome

$$p_2(x,y) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2\leq 2} a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_1}$$

exakt integriert.
Hinweis: Man nutze Symmetrien in der Lage der Stützstellen und bei der Bestimmung der Integrationsgewichte aus!

**17.a** Für reguläre Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen reellen Parameter $\alpha > 0$ werde das stationäre Iterationsverfahren

$$\underline{x}^{k+1} := \underline{x}^k - \alpha B^{-1}(A\underline{x}^k - \underline{f})$$

betrachtet. Für die Iterationsmatrix gelte

$$\|I - \alpha B^{-1}A\|_M \leq q < 1$$

in einer durch die Vektornorm $\|\cdot\|_V$ induzierten Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ . Man zeige, dass das Iterationsverfahren gegen $\underline{x} = A^{-1}\underline{f}$ konvergiert. Weiter zeige man die a priori Fehlerabschätzung

$$\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}\|_V \leq \frac{q^{k+1}}{1-q}\|\underline{x}^1 - \underline{x}^0\|_V$$

sowie die a posteriori Fehlerabschätzung

$$\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}\|_V \leq \frac{q}{1-q}\|\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k\|_V.$$

**17.b** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$A\underline{x} = \underline{f}$$

mit einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Das Jacobi-Verfahren ist durch folgende Iterationsvorschrift

$$\underline{x}^{k+1} = D^{-1}[\underline{f} - (L+R)\underline{x}^k],$$

gegeben, wobei $L$, $R$ und $D$ die Einträge

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & 0 & a_{23} & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ haben.

Man zeige, dass das Jacobi-Verfahren für jede beliebige Startnäherung $\underline{x}^0$ konvergiert, wenn für die Matrix $A$ das strenge Zeilensummenkriterium

$$\max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \leq q < 1$$

erfüllt ist.

**18.** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$A\underline{x} = \underline{f}$$

mit einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Das Verfahren der sukzessiven Überrelaxation(SOR-Verfahren) ist ein Iterationsverfahren, das durch folgende Iterationsvorschrift gegeben ist

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \omega(D+\omega L)^{-1}[A\underline{x}^k - \underline{f}],$$

wobei $D$ und $L$ wie in Beispiel 17 gegeben sind.
Sei $A$ eine symmetrische und positiv definite Matrix. Man zeige, dass das SOR-Verfahren genau dann konvergiert, wenn $0 < \omega < 2$ erfüllt ist.

**19.** Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$A = I + \underline{e}\,\underline{e}^\top \qquad \text{mit } \underline{e} = (1,\ldots,1)^\top .$$

Man bestimme alle Eigenwerte von $A$.

**20.** Gegeben sei die Massematrix $M_h$ bezüglich stückweise linearer Basisfunktionen in der Form

$$M_h = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & h_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2(h_{n-1}+h_n) & h_n \\ 0 & \cdots & 0 & h_n & 2h_n \end{pmatrix}$$

und die Diagonalmatrix $B_h$ mit

$$B_h = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_1+h_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & h_{n-1}+h_n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_n \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass für alle $\underline{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Spektraläquivalenzungleichungen

$$\frac{1}{6}(B_h\underline{u},\underline{u}) \leq (M_h\underline{u},\underline{u}) \leq \frac{1}{2}(B_h\underline{u},\underline{u})$$

gelten und $\kappa_2(B_h^{-1}M_h) \leq 3$ ist.
Man bestimme die Anzahl der zur näherungsweisen Lösung des linearen Gleichungssystems $M_h\underline{x} = \underline{f}$ notwendigen CG-Iterationen mit $B_h$ als Vorkonditionierungsmatrix, um für die Startnäherung $\underline{x}^0 = \underline{0}$ eine relative Fehlerreduktion von $\varepsilon = 10^{-8}$ zu gewährleisten.