Technische Universität Graz
Institut für Mathematik D
Prof. Dr. Olaf Steinbach

WS 2005/2006
Blatt 5
13.12.2005

Numerische Mathematik 1

21. Zu bestimmen ist die Nullstelle $\overline{x} \in [1,2]$ der Funktion $f(x) = x^3 - 2x - 2$. Man bestimme die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte des Bisektionverfahrens, um eine relative Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-3}$ zu erreichen. Man berechne diese Näherungslösung.

22. Gegeben sei die Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}[2x_k + \frac{a}{x_k^2}] \qquad \text{für } k = 0,1,2,\ldots, \qquad x_0 = a.$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 1$ ist die Iterationsvorschrift eine Kontraktion?
b) Wieviele Iterationen sind notwendig, um $\sqrt[3]{a}$ mit einer relativen Genauigkeit von ε zu berechnen?

23. Für die näherungsweise Berechnung der Nullstelle von

$$f(x) = x + \ln x, \quad x > 0$$

untersuche man die Fixpunktiterationen $x_{k+1} = \phi_i(x_k)$ mit

$$\phi_1(x) = -\ln x, \qquad \phi_2(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x})$$

auf ihre Konvergenz und bestimme gegebenfalls die Konvergenzordnung.

24. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Für welche Startwerte konvergiert das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle $x = 0$.

25. Man verwende ein geeignetes Näherungsverfahren zur Berechnung aller Nullstellen von

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{11}{10}x - \frac{1}{10}.$$

S2. Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ $(m+1)$-mal stetig differenzierbar und $\overline{x}$ eine Nullstelle von $f(x)$ der Vielfachheit $m \geq 2$, mit $f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) = \ldots = f^{(m-1)}(\overline{x}) = 0$ und $f^{(m)}(\overline{x}) \neq 0$.
a) Man zeige, dass in einer Umgebung von $\overline{x}$ das Newton-Verfahren linear konvergiert.
b) Man zeige, dass das modifizierte Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

lokal (mindestens) quadratisch konvergiert.